



ششمین همایش ملی ریاضی و آمار

دانشگاه گنبد کاووس، ۲۳ بهمن ۱۴۰۴

مجموعه مقالات فارسی همایش

دبیر علمی

دکتر راضیه فرخ زاد رستمی

دبیر اجرایی

دکتر نعمت اله تقی نژاد

دکتر طاهره جباری

تهیه و تنظیم

دکتر نعمت اله تقی نژاد

فهرست مطالب

صفحه	عنوان مقاله	کد مقاله
۱	ارائه یک روش نموداری-تصویری برای تحلیل نوسان در معادلات دیفرانسیل تأخیری خطی مرتبه اول و کاربردهای آموزشی آن	۲۲۰
۷	تحلیل بی‌زی جداول پیش‌بینی با استفاده از زنجیر مارکوف مونت کارلو	۲۴۱
۱۲	ارائه یک روش جدید نهم‌نگاری تصاویر دیجیتال بر اساس روابط آماری ضرایب تبدیل موجک گسسته تصویر و شبکه عصبی	۲۸۰
۱۸	نهم‌نگاری تصاویر دیجیتال قوی، سازگار و کور مبتنی بر یادگیری ماشین فوق سریع (ELM) با استفاده از روش ترکیبی DWT-DCT	۲۸۱
۲۴	تحول نقش مدرسان درس ریاضیات در آموزش عالی تحت تأثیر تدریس به کمک فناوری‌های نوین آموزشی	۳۰۵
۳۰	چگونگی رفتار تصادفات رانندگی با داده های Circular	۳۱۶
۳۷	مروری بر نقش نرم‌افزار MATLAB در آموزش مفاهیم ریاضی و تجسم نمودارها (با تأکید بر آموزش مدرسه‌ای)	۳۶۰
۴۲	بررسی خواص هندسی برد عددی درجه دوم دسته‌های خطی ماتریس‌های بلوکی همراه با الگوریتم	۳۸۴
۴۶	برآورد انقباضی بر اساس برآورد E-بیز	۳۸۷
۵۱	تحلیل کتاب درسی هندسه ۲ پایه یازدهم بر اساس شاخص خلاقیت گیلفورد	۳۹۲
۵۷	انتقال‌های Q - نرم از زیرگروه‌های Q - نرم	۱۰۵
۶۳	اثرپذیری نرم‌ها روی زیرفضاهای برداری فازی و زیر فضاهای دوبرداری فازی	۱۰۴
۶۹	بررسی راهکارهایی جهت بهبود نگرش دانشجویان نسبت به درس ریاضی: مطالعه موردی دانشگاه ملی مهارت- آموزش‌کننده دختران بیرجند	۲۴۳
۷۵	تحلیل موجک برای برآورد داده‌های پرت در مدل‌های رگرسیون خطی چندمتغیره	۲۴۹
۸۰	رگرسیون مستطیلی برای مدل همراه با خطا	۲۷۷
۸۴	نگاهی جامع برمدل‌های هوشمند تقویت مهارت‌های ریاضی و تأثیر آنها (با رویکرد درس پژوهی) بر تحول برنامه‌درسی در تمام مقاطع آموزشی	۱۶۹
۹۰	توصیف ضربگرهای با برد بسته از طریق چارچوب‌های نقطه ثابت در جبرهای باناخ دوگانی	۱۷۰
۹۶	کاهش استرس دانش آموزان در زمان پاسخ گویی در درس ریاضی با ابزارهای هوش مصنوعی	۳۷۰
۱۰۱	برآورد پارامتر برای توزیع لجیت-لاپلاس و کاربرد آن در داده‌های اضطراب	۱۱۹
۱۰۶	بررسی اجمالی قابلهای تلفیقی تعمیم یافته‌ی در هم تنیده در فضای هیلبرت	۱۲۲
۱۱۰	طراحی و تبیین مدل آموزشی یکپارچه اعداد صحیح بر مبنای مولفه های سه گانه یادگیری ریاضیات	۱۴۵
۱۱۵	تحلیل آماری فیلتر موجبری پلاسمونی شامل تشدیدگر	۱۵۸
۱۲۱	چارچوب ترکیبی GNN-Fuzzy AHP برای ارزیابی و رتبه‌بندی تأمین‌کنندگان	۱۶۷
۱۲۸	آسیب‌شناسی شناختی آموزش هندسه در دوره متوسطه دوم با تأکید بر رویکردهای نوین تطبیقی	۱۷۶
۱۳۳	مدل‌سازی یک شبکه الکتریکی در چارچوب سیستم پورت-همیلتونی و مقایسه آن با مدل متناظر در چارچوب فضای حالت	۲۰۵
۱۳۷	جایگاه ریاضیات و عدد در اندیشه‌ی فیلسوفان مسلمان	۲۴۵
۱۴۲	هوم- زیر جبر لی فازی ناهموار	۲۵۵
۱۴۷	حل معادلات دیفرانسیل کسری با استفاده از توابع ترکیبی گنوجی	۲۷۵
۱۵۴	آموزش ریاضی در عصر دیجیتال	۳۱۰
۱۵۸	روش پلکانی در حل مسائل کنترل بهینه	۳۱۲
۱۶۳	مثال نقضی بر یک روش رتبه‌بندی بهبود یافته تحت عدم قطعیت فازی	۲۱۰
۱۶۴	بررسی نظری ساختار مقدار مورد انتظار برای اعداد فازی شهودی	۲۱۱
۱۶۵	کاربرد جبر لی در نظریه کنترل و بررسی مفهوم کنترل‌پذیری در سیستم‌های کنترل غیرخطی با استفاده از براکت‌های لی	۲۰۴
۱۶۶	توزیع نظری آماره T^2 در فاز II پروفایل‌های پواسون	۳۸۳



ششمین همایش ملی ریاضی و آمار

<https://conf.gonbad.ac.ir/msc1404>

F-220، صص ۱-۶.

ارائه یک روش نموداری-تصویری برای تحلیل نوسان در معادلات دیفرانسیل
تأخیری خطی مرتبه اول و کاربردهای آموزشی آن

هانیه هاشمی

دانشجوی دکتری، دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم تحقیقات: hanieh.hashemi@iau.ac.ir

چکیده

معادلات دیفرانسیل تأخیری خطی ابزارهای کلیدی در مدل‌سازی سیستم‌های دینامیکی حافظه‌دار محسوب شده و کاربردهای گسترده‌ای در حوزه‌هایی از مهندسی کنترل تا زیست‌شناسی ریاضی دارند. تحلیل کیفی رفتار این معادلات، به‌ویژه تشخیص نوسان جواب‌ها، عموماً بر معیارهای تحلیلی پیچیده و کم‌شهودی استوار است که درک آن را برای دانشجویان و پژوهشگران غیرمتخصص با دشواری مواجه می‌سازد. این مقاله با هدف پر کردن این شکاف، چارچوب روش‌شناختی نوین و بصری‌سازی شده‌ای ارائه می‌دهد که در آن شروط تحلیلی نوسان، در قالب یک ابزار نموداری-تصویری نظام‌مند ساده‌سازی و تجسم می‌یابند. هسته اصلی این رویکرد، تبدیل شروط انتگرالی و جبری کلاسیک به نقشه‌ها و نمودارهای تصمیم‌گیری مبتنی بر رنگ و هندسه است که تشخیص سریع و شهودی رفتار نوسانی را ممکن می‌سازد. اعتبار و کارایی روش پیشنهادی با ارائه چندین مثال گویای عددی شامل ضرایب ثابت، متناوب و متغیر تأیید شده است. دستاورد اصلی این پژوهش، توسعه یک چارچوب کمک‌آموزشی است که نه تنها درک عمیق‌تری از پدیده نوسان در معادلات تأخیری فراهم می‌آورد، بلکه به عنوان راهنمایی عملی، تحلیل این معادلات را برای علاقه‌مندان رشته‌های مختلف تسهیل می‌نماید. در نهایت، با اشاره به قابلیت تعمیم این چارچوب به معادلات مرتبه بالاتر و غیرخطی، افق‌های جدیدی برای تلفیق روش‌های تحلیلی با ابزارهای بصری در آموزش و پژوهش ریاضیات پیشرفته گشوده می‌شود.

کلمات کلیدی: روش نموداری؛ تشخیص نوسان؛ معادلات دیفرانسیل تأخیری؛ تحلیل کیفی؛ تجسم ریاضی

۱- مقدمه

سیستم‌های دینامیکی حاوی حافظه و تاریخچه، توصیف دقیق‌تری از پدیده‌های دنیای واقعی از نوسانات اقتصادی و انتشار بیماری‌ها تا پایداری شبکه‌های قدرت و یادگیری در شبکه‌های عصبی ارائه می‌دهند. معادلات دیفرانسیل تأخیری خطی مرتبه اول، به عنوان ساده‌ترین و در عین حال پرکاربردترین کلاس از این سیستم‌ها، چهارچوب ریاضی مناسبی برای چنین مدل‌سازی‌هایی فراهم می‌کنند. تحلیل کیفی رفتار جواب‌های این معادلات، به‌ویژه بررسی پدیده نوسان، برای درک قابلیت‌های سیستم از جمله پایداری، کارایی و پاسخ به اغتشاشات، امری ضروری و بنیادین است [۱]. اگرچه نظریه نوسان برای معادلات دیفرانسیل معمولی به بلوغ قابل توجهی رسیده، اما حضور تأخیر ثابت یا متغیر در معادله، پیچیدگی‌های تحلیلی چشمگیری ایجاد می‌کند و بسیاری از نتایج کلاسیک را بی‌اعتبار می‌سازد. معیارهای سنتی تشخیص نوسان در معادلات تأخیری، عمدتاً بر پایه شروط انتگرالی مانند واگرایی انتگرال ضرایب استوار هستند [۲،۳]. هرچند این معیارها از اتقان ریاضی بالایی برخوردارند، اما دو محدودیت عمده دارند: اولاً، بررسی تحقق این شروط برای ضرایب با فرم‌های پیچیده یا داده‌های تجربی اغلب دشوار است. ثانیاً، این معیارها فاقد شهود هندسی یا تصویر ذهنی روشن هستند، در نتیجه درک عمیق چرایی و چگونگی رخداد نوسان را برای دانشجویان و پژوهشگران حوزه‌های کاربردی (مانند مهندسی کنترل یا زیست‌شناسی) دشوار می‌سازد [۴]. در سال‌های اخیر، تلاش‌هایی برای توسعه معیارهای نوسان مستقل از شرط انتگرالی و با تکیه بر روابط ساختاری بین ضرایب صورت گرفته

ششمین همایش ملی ریاضی و آمار

<https://conf.gonbad.ac.ir/msc1404>

است [۵،۶]. همچنین، با گسترش نرم‌افزارهای محاسباتی قوی، استفاده از روش‌های عددی برای شبیه‌سازی و استنتاج رفتار کیفی رواج یافته است [۷]. با این وجود، شکاف قابل توجهی بین این پیشرفت‌های تحلیلی/عددی و نیاز مبرام به ابزارهای مفهومی و شهودپذیر برای آموزش و انتقال مؤثر مفاهیم وجود دارد. فقدان یک چارچوب نموداری-تصویری نظام‌مند که بتواند پیچیدگی‌های محاسباتی را به درکی بصری و مستقیم تبدیل کند، به وضوح احساس می‌شود.

هدف اصلی این مقاله، پر کردن این شکاف با ارائه و بسط یک روش نموداری-تصویری نوین برای تشخیص نوسان در معادلات دیفرانسیل تأخیری خطی مرتبه اول است. در این روش، شروط انتگرالی کلاسیک و روابط ساختاری پیچیده، به کمک نقشه‌های رنگی، نمودارهای تصمیم‌گیری سلسله‌مراتبی و دیاگرام‌های ناحیه‌بندی، به عناصر بصری ساده و قابل تفسیر تبدیل می‌شوند. نوآوری محوری این کار، در خلق یک پل مفهومی بین تحلیل ریاضی محض و درک شهودی است، به گونه‌ای که بدون قربانی کردن دقت ریاضی، امکان تشخیص سریع و بصری نوسان را فراهم می‌آورد. ساختار این مقاله به شرح زیر است: بخش ۲ به بیان مبانی ریاضی و تشریح روش نموداری-تصویری پیشنهادی اختصاص دارد. در بخش ۳، کارایی این روش با اعمال بر سه مثال کاربردی با ضرایب متفاوت (متناوب، ثابت و نویزی) نشان داده می‌شود. در نهایت، بخش ۴ شامل بحث، نتیجه‌گیری و پیشنهاداتی برای کارهای آینده است.

۲. مبانی و روش پیشنهادی

۱،۲ معادله پایه و تعریف نوسان

معادله مورد مطالعه به فرم استاندارد

$$x'(t) + p(t)x(t - \tau) = 0, \tau > 0$$

است. یک جواب را نوسانی می‌گویند اگر بینهایت بار علامت آن تغییر کند. معیار کلاسیک نوسان برای ضرایب نامنفی، شرط

انتگرالی

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \int_{t-\tau}^t p(s) ds > \frac{1}{e}$$

می‌باشد. درک این شرط و تعمیم آن به حالتی که ضرایب اعداد مختلط هستند، دشوار است.

۲،۲- هسته روش نموداری-تصویری

ایده اصلی این روش، تجسم و ساده‌سازی شرط انتگرالی کلاسیک نوسان از طریق تبدیل آن به یک فرآیند بصری نظام‌مند است. روش پیشنهادی، که در قالب یک الگوریتم سه‌گام و یک چک‌لیست تصمیم‌گیری سریع ارائه می‌شود، به شرح زیر اجرا می‌گردد:

۱،۲،۲- گام نخست: ترسیم و تعیین آستانه

نمودار تابع ضریب $p(t)$ در بازه زمانی مورد نظر رسم می‌شود. سپس یک خط افقی (معمولاً به صورت خط‌چین) به عنوان نوار آستانه در ارتفاع $\lambda = 1/(e\tau)$ بر روی نمودار اضافه می‌گردد. این خط معیار کیفی اولیه برای مقایسه فراهم می‌کند.

۲،۲،۲- گام دوم: تحلیل نظام‌مند پنجره‌های متحرک

یک پنجره متحرک به طول τ (متناظر با مقدار تأخیر) در نظر گرفته می‌شود. برای هر پنجره، مساحت زیر منحنی $p(t)$ (به صورت تقریبی یا تحلیلی) محاسبه و با مساحت مرجع $A_{ref} = \tau \times \lambda$ مقایسه می‌شود. این فرآیند برای پنجره‌های متوالی در طول بازه زمانی تکرار می‌شود.

ششمین همایش ملی ریاضی و آمار

<https://conf.gonbad.ac.ir/msc1404>

۳،۲،۲- گام سوم: تصمیم‌گیری بر اساس چک‌لیست

نتایج حاصل از تحلیل پنجره‌ها با استفاده از چک‌لیست زیر تفسیر و جمع‌بندی می‌شود:

جدول ۱: چک‌لیست تصمیم‌گیری سریع برای تشخیص نوسان

معیار بصری / مقداری	تصمیم کیفی
نمودار $p(t)$ به طور پیوسته بالای نوار آستانه قرار دارد.	پتانسیل قوی نوسان
نمودار $p(t)$ به طور پیوسته زیر نوار آستانه قرار دارد.	رفتار غیرنوسانی محتمل
نمودار $p(t)$ به طور مکرر نوار آستانه را قطع می‌کند.	تحلیل کمی پنجره‌ها ضروری است
در بیش از ۷۰٪ پنجره‌های متحرک، مساحت از A_{ref} بیشتر است.	نوسان
در کمتر از ۳۰٪ پنجره‌ها، مساحت از A_{ref} بیشتر است.	عدم نوسان
درصد پنجره‌های عبوری بین ۷۰٪ تا ۷۰٪ است.	حالت مرزی (نیاز به روش تکمیلی)

۳،۲ - مزیت کلیدی

این رویکرد، به جای محاسبه تحلیلی پیچیده، با یک مقایسه بصری ساده بین «نمودار ضریب» و «نوار آستانه» و در نظرگیری مفهوم پنجره متحرک، امکان قضاوت سریع و شهودی را فراهم می‌کند.

۳- مثال‌های کاربردی و بررسی

برای نشان دادن کارایی روش، آن را بر روی سه معادله با مشخصات کاملاً متفاوت اعمال می‌کنیم.

۱،۳- مثال اول: ضریب متناوب با دامنه متغیر

معادله زیر را در نظر بگیرید:

$$x'(t) + \left(1.0 + 0.8 \sin\left(\frac{\tau \pi t}{1.5}\right)\right) x(t - 1.2) = 0, t \geq 0.$$

در اینجا $\tau = 1.2$ و ضریب $p(t) = 1.0 + 0.8 \sin\left(\frac{\tau \pi t}{1.5}\right)$ دارای دوره تناوب ۱،۵ است. آستانه نظری $\lambda = 1/(e \times 1.2) \approx 0.306$ محاسبه می‌شود.

۱،۱،۳- تحلیل روش نموداری (مطابق شکل ۱-ا):

(۱) نمودار ضریب که یک موج سینوسی با مقدار متوسط ۱،۰ و دامنه ۰،۸ است، رسم می‌شود. (۲) نوار آستانه در ارتفاع ۰،۳۰۶ به صورت خطچین قرمز افقی اضافه می‌گردد. (۳) مشاهده می‌شود که تقریباً در تمامی نقاط، نمودار $p(t)$ به طور مشخصی در بالای نوار آستانه قرار دارد، حتی در کمینه‌های خود نیز از ۰،۲ بالاتر است. این نشان می‌دهد که انتگرال در هر پنجره متحرک به طول ۱،۲ قطعاً از $0.367 = 0.306 \times 1.2$ بیشتر خواهد بود. (۴) پیش‌بینی رفتار سیستم نوسانی است.

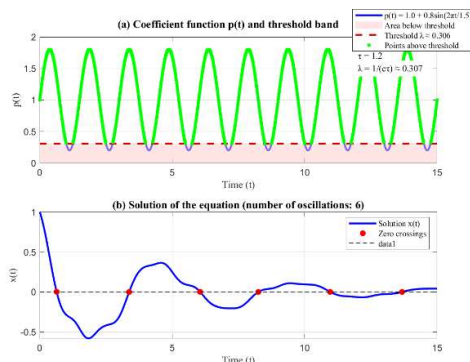
۲،۱،۳- شبیه‌سازی عددی مثال اول

حل عددی با شرایط اولیه مناسب، جوابی با نوسانات پایدار و پیوسته را تولید می‌کند که پیش‌بینی را تأیید می‌نماید (خط

آبی در شکل ۱-ب).

ششمین همایش ملی ریاضی و آمار

<https://conf.gonbad.ac.ir/msc1404>



شکل ۱: تحلیل نموداری-تصویری معادله با ضریب متناوب سینوسی (مثال ۱,۳)

۲,۳- مثال دوم: ضریب ثابت مرزی و تأثیر تأخیر کوچک

معادله زیر را بررسی می‌کنیم:

$$x'(t) + 0.9x(t - 0.5) = 0, t \geq 0.$$

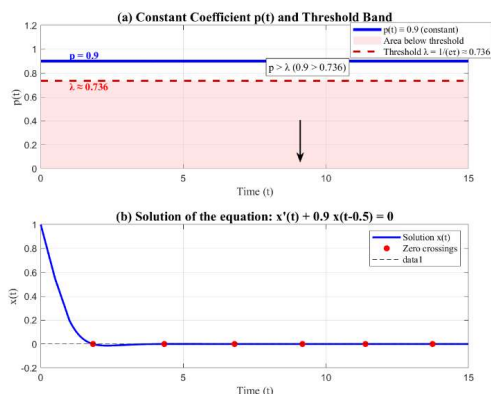
این یک حالت ساده اما گویاست $p(t) \equiv 0.9$ ، $\tau = 0.5$ و آستانه $\lambda = 1/(e \times 0.5) \approx 0.736$.

۱,۲,۳- تحلیل روش نموداری (مطابق شکل ۲-۳):

(۱) نمودار ضریب به صورت یک خط افقی در ارتفاع ۰,۹ (رسم می‌شود ۲) نوار آستانه در ارتفاع ۰,۷۳۶ به صورت خطچین قرمز افقی اضافه می‌گردد. مشاهده می‌شود که خط ضریب (۰,۹) به وضوح از نوار آستانه (۰,۷۳۶) بالاتر است. این یعنی مقدار ثابت ضریب از آستانه بیشتر است. پیش‌بینی: با توجه به اینکه $p > \lambda$ ، سیستم نوسانی خواهد بود. این پیش‌بینی با معیار تحلیلی $p\tau = 0.45 > 1/e \approx 0.736$ نیز سازگار است.

۲,۲,۳- شبیه‌سازی عددی مثال دوم

حل عددی با شرایط اولیه مناسب، جوابی با نوسانات پایدار و پیوسته را تولید می‌کند که پیش‌بینی روش نموداری را تأیید می‌نماید (شکل ۲-۳). این مثال ساده نشان می‌دهد که چگونه می‌توان با یک نگاه و بدون هیچ محاسبه‌ای، تنها با مقایسه‌ی موقعیت یک خط و یک نوار، نتیجه‌ی کلاسیک را حدس زد.



شکل ۲: تحلیل نموداری-تصویری معادله با ضریب ثابت (مثال ۲,۳)

۳,۳- مثال سوم: ضریب نویزی و تحلیل در بازه‌های زمانی

معادله زیر را بررسی می‌کنیم:

$$x'(t) + (0.4 + 0.25 \cdot \text{rand}(t))x(t - 2) = 0, t \geq 0.$$

ششمین همایش ملی ریاضی و آمار

<https://conf.gonbad.ac.ir/msc1404>

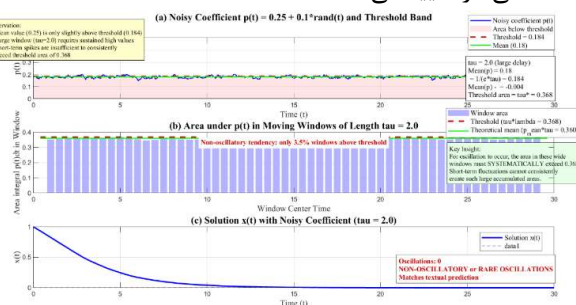
در اینجا $p(t)$ یک سیگنال تصادفی با میانگین 0.4 و دامنه نوسان حدود 0.25 است و $\tau = 2$ یک تأخیر نسبتاً بزرگ است. آستانه $\lambda = 1/(e \times 2) \approx 0.184$.

۱،۳،۳- تحلیل روش نموداری (مطابق شکل ۳-ا):

(۱) نمودار یک سیگنال پرنویز با تراز متوسط 0.4 رسم می‌شود. (۲) نوار آستانه در ارتفاع پایین 0.184 نمایش داده می‌شود. (۳) مشاهده: اگرچه مقادیر لحظه‌ای $p(t)$ گاهی تا 0.65 بالا می‌روند، اما مقدار میانگین (0.4) فقط کمی از آستانه (0.184) بیشتر است. نکته کلیدی اینجاست که "پنجره متحرک بسیار بزرگی به طول $\tau = 2$ " وجود دارد. برای اینکه شرط نوسان برقرار شود، باید مساحت زیر منحنی در این پنجره‌های عریض، به طور سیستماتیک از $0.368 = 2 \times 0.184$ بزرگتر باشد. با مشاهده نمودار، به نظر نمی‌رسد که نوسانات کوتاه‌مدت سیگنال بتوانند چنین مساحت تجمع‌ی بزرگی را در یک پنجره 2 واحدی به طور مکرر ایجاد کنند. (۴) پیش‌بینی: سیستم به احتمال زیاد غیرنوسانی است یا نوسانات بسیار نامنظم و با دوره‌های طولانی دارد.

۲،۳،۳- شبیه‌سازی عددی مثال سوم

جواب عددی، پس از یک نوسان اولیه کوتاه، به سمت صفر میل می‌کند و در بلندمدت غیرنوسانی است (شکل ۳-ب). تحلیل پنجره‌های متحرک نیز نشان می‌دهد که تنها 3.5% از پنجره‌ها از آستانه عبور می‌کنند (شکل ۳-ب). این نتایج، قضاوت کیفی مبتنی بر «پنجره عریض و مساحت ناکافی» را تأیید می‌کنند.



تحلیل نموداری-تصویری معادله با ضریب نویزی و تأخیر بزرگ (مثال ۳)

این سه مثال، نشان می‌دهند که چگونه روش نموداری-تصویری پیشنهادی می‌تواند برای انواع مختلفی از سیستم‌ها (متناوب خالص، ثابت، نویزی) به کار رود و با سرعت و بر اساس شهود بصری، پیش‌بینی‌های معقولی درباره رفتار نوسانی سیستم ارائه دهد.

۴- بحث و نتیجه‌گیری

این مقاله یک چارچوب نموداری-تصویری ساده برای تحلیل کیفی نوسان در معادلات دیفرانسیل تأخیری خطی ارائه کرد. روش پیشنهادی، با تبدیل شرط انتگرالی کلاسیک به یک مقایسه بصری و به‌کارگیری مفهوم پنجره متحرک، امکان درک شهودی و تشخیص سریع پتانسیل نوسان را فراهم می‌سازد. مثال‌های متنوع ارائه‌شده، شامل ضرایب متناوب، ثابت و نویزی، همخوانی قابل توجه این رویکرد با نتایج تحلیلی و عددی را نشان دادند. مزایای اصلی این روش عبارتند از: افزایش درک مفهومی از طریق ایجاد پیوند بصری مستقیم بین شکل ضریب، بزرگی تأخیر و پدیده نوسان؛ کاربردی بودن برای غیرمتخصصین با کاهش وابستگی به محاسبات تحلیلی پیچیده در ارزیابی اولیه؛ و قابلیت استفاده به عنوان یک ابزار کمکی مؤثر در آموزش، برای تدریس ملموس‌تر مفاهیم نظریه نوسان در دوره‌های معادلات دیفرانسیل پیشرفته یا سیستم‌های دینامیکی. روش نموداری-تصویری ارائه‌شده، با وجود کارایی در تحلیل کیفی نوسان، دارای محدودیت‌هایی است که عمدتاً ناشی از خطی بودن، مرتبه اول بودن و ثابت بودن تأخیر در معادله مورد مطالعه است. در سیستم‌های واقعی که با معادلات غیرخطی، تأخیر متغیر یا معادلات مرتبه بالاتر مدل می‌شوند، این روش نیاز به توسعه و بازنگری اساسی دارد. همچنین، ماهیت بصری روش ممکن است در مواردی



ششمین همایش ملی ریاضی و آمار

<https://conf.gonbad.ac.ir/msc1404>

مانند ضرایب با نوسانات سریع یا مقادیر منفی، به تکمیل محاسباتی نیاز داشته باشد. افزون بر این، روش حاضر صرفاً به تشخیص وجود نوسان می پردازد و تحلیل پایداری یا مشخصات کمی نوسان را پوشش نمی دهد. پیشنهاد می شود در کارهای آینده، این چارچوب به معادلات با ساختار عمومی تر (غیرخطی، تأخیر متغیر، معادلات خنثی) تعمیم داده شود. همچنین، توسعه نرم افزارهای شبیه ساز بر پایه این روش و طراحی بسته های آموزشی تعاملی، می تواند به کاربردی تر شدن آن در محیط های پژوهشی و آموزشی کمک کند.

۵ - مراجع

- [۱] Hale JK, Lunel SM. Introduction to functional differential equations. Springer Science & Business Media; 2013 Nov 21.
- [۲] Györi I, Ladas G. Oscillation theory of delay differential equations: with applications. Oxford University Press; 1991 Aug 1.
- [۳] Erbe L. Oscillation theory for functional differential equations. Routledge; 2017 Oct 2.
- [۴] Smith HL. An introduction to delay differential equations with applications to the life sciences. New York: springer; 2011.
- [۵] Attia ER, Chatzarakis GE. Iterative oscillation criteria for first-order difference equations with non-monotone advanced arguments. Journal of Applied Mathematics and Computing. 2022 Oct;68(5):3089-105.
- [۶] Baculiková B, Džurina J. Oscillation theorems for second-order nonlinear neutral differential equations. Computers & Mathematics with Applications. 2011 Dec 1;62(12):4472-8.
- [۷] Bellen A, Zennaro M. Numerical methods for delay differential equations. OUP Oxford; 2003 Mar 20.



ششمین همایش ملی ریاضی و آمار

<https://conf.gonbad.ac.ir/msc1404>

F-241، صص ۷-۱۱.

تحلیل بیزی جداول پیشابندی با استفاده از زنجیر مارکوف مونت کارلو

علی آذربر

هیئت علمی گروه آمار، دانشگاه ارومیه: a.azarbar@urmia.ac.ir

چکیده

یکی از دلایل استفاده روزافزون رده آمار بیزی در مقابل رده آمار کلاسیک بالا بودن دقت محاسبات در رده آمار بیزی است و این به دلیل سهیم بودن اطلاعات و عقاید پیشین کاربر در استنباط آماری است. امروزه رده آمار بیزی در تمامی مباحث آماری وارد شده و وقت آمارشناسان زیادی را به خود اختصاص داده است. لازم به ذکر است یکی از موانع توسعه استنباط بیزی پیچیده بودن توابع پسین پارامترها بوده است به گونه‌ای که جز در موارد خاص مثلاً با به کارگیری توزیع‌های پیشین مزدوج شکل بسته و شناخته شده‌ای برای توزیع پسین به دست نمی‌آمد. سرانجام آمارشناسان بیزی با ابداع روش‌های زنجیر مارکوف مونت کارلویی امکان نمونه‌گیری از توزیع پسین را هموار کردند و به این طریق استنباط راجع به پارامترهای مجهول مدل امکان‌پذیر شد. در این مطالعه داده‌های توزیع نسبی جمعیت ده ساله و بیشتر بر حسب رده سنی، جنسیت و وضعیت اشتغال در استان تهران در سال ۱۳۹۵ در رده آمار بیزی با استفاده از یک مدل لگاریتم خطی در یک جدول پیشابندی مدل‌بندی و پارامترهای مدل برآورد می‌شوند.

کلمات کلیدی: آمار بیزی؛ جداول پیشابندی؛ توزیع پیشین؛ توزیع پسین؛ مدل لگاریتم خطی.

۱- مقدمه

یکی از مدل‌های پر کاربرد آماری در داده‌های جداول پیشابندی مدل لگاریتم خطی است. در این مدل لگاریتم میانگین متغیر پاسخ بر حسب عوامل موجود در جدول پیشابندی مدل‌بندی و با استفاده از مشاهدات جمع‌آوری شده پارامترهای مدل برآورد می‌شوند [۱]. با توجه به بالا بودن دقت محاسبات در رده آمار بیزی پارامترهای مدل را می‌توان به صورت بیزی برآورد کرد. اما در بعضی مواقع توزیع پسین پارامترها شکل بسته و شناخته شده‌ای ندارند و بنابراین برآورد پارامترها را دچار مشکل می‌کند. با پیشرفت‌هایی در رده آمار بیزی صورت گرفته این مشکل را با استفاده از زنجیر مارکوف مونت کارلو می‌توان مرتفع نمود [۲]. مشکل دیگری که در رده آمار بیزی وجود داشت عدم وجود نرم‌افزاری توانمند برای محاسبات حاصل از به کارگیری زنجیر مارکوف مونت کارلو بود. سرانجام در بخش آمار زیستی کمیته تحقیقات پزشکی انگلیس (M.R.C) نرم‌افزاری جامع و توانمند با نام BUGS که مخفف عبارت "Bayesian Inference Using Gibbs Sampling" است، ابداع شد [۳]. BUGS همان گونه که از نامش پیداست در ابتدا به منظور استنباط بیزی به کمک نمونه‌گیری گیبس طراحی شد اما با گسترش آن در حال حاضر قادر به انجام تحلیل بیزی به کمک الگوریتم‌های دیگری مانند نمونه‌گیری برای رد کردن سازوار، نمونه‌گیری برشی و الگوریتم متروپولیس است. انجام تحلیل بیزی بسیاری از مدل‌های آماری همچون مدل‌های خطی، مدل‌های سلسله مراتبی، مدل‌های اثرات تصادفی و مدل‌های بقاء به وسیله آن امکان‌پذیر است [۴]. در این مطالعه از روش نمونه‌گیری گیبس استفاده شده است. در این مطالعه با مدل‌بندی بیزی سه متغیر رسته‌ای رده سنی، جنسیت و میزان تحصیلات به وسیله یک مدل لگاریتم خطی و استفاده از تکنیک‌های زنجیر مارکوف مونت کارلو بهترین مدل انتخاب و پارامترهای آن برآورد می‌شود.

ششمین همایش ملی ریاضی و آمار

<https://conf.gonbad.ac.ir/msc1404>

۲- تحلیل بیزی جداول پیشابندی سه طرفه

فرض کنید یک جدول پیشابندی سه طرفه $I \times J \times K$ وجود داشته باشد که در آن فراوانی حجره‌ها و θ_{ijk} احتمالات

متناظر باشند. تبدیل لوجیت $Ln(\theta_{ijk}) = \gamma_{ijk} - D(\gamma)$ که در آن $D(\gamma) = Ln\left(\sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^K \exp(\gamma_{ijk})\right)$ را در نظر

بگیرید به طوری که $\sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^K \theta_{ijk} = 1$ و $\sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^K Y_{ijk} = N$ یک مدل لگاریتم خطی را می‌توان به صورت زیر در نظر گرفت.

$$Ln(\theta_{ijk}) = U_{\nu(i)} + U_{\nu(j)} + U_{\nu(k)} + U_{\nu(ij)} + U_{\nu(ik)} + U_{\nu(jk)} + U_{\nu(ijk)} \quad (1)$$

توزیع‌های پیشین برای اثرات موجود در این مدل را می‌توان به صورت زیر در نظر گرفت.

$$\begin{aligned} U_{\nu(i)} &\sim N(0, \sigma_{\nu}^2) & U_{\nu(j)} &\sim N(0, \sigma_{\nu}^2) & U_{\nu(k)} &\sim N(0, \sigma_{\nu}^2) \\ U_{\nu(ij)} &\sim N(0, \sigma_{\nu}^2) & U_{\nu(ik)} &\sim N(0, \sigma_{\nu}^2) & U_{\nu(jk)} &\sim N(0, \sigma_{\nu}^2) \\ U_{\nu(ijk)} &\sim N(0, \sigma_{\nu}^2) \end{aligned}$$

در استنباط بیزی توزیع پسین پایه و اساس استنباط درباره پارامترها است. بنابراین برای استنباط راجع به پارامترها نیاز به تعیین توزیع پسین است. برای یافتن توزیع پسین، علاوه بر توزیع پیشین پارامترها نیاز به تابع درستنمایی مشاهدات است. با فرض این که فراوانی حجره‌های جدول پیشابندی دارای توزیع IJK جمله‌ای هستند، تابع درستنمایی عبارت است از

$$\begin{aligned} L(\theta|\mathbf{y}) &= \prod_{i=1}^I \prod_{j=1}^J \prod_{k=1}^K \frac{N!}{y_{ijk}!} \theta_{ijk}^{y_{ijk}} \\ &\propto \prod_{i=1}^I \prod_{j=1}^J \prod_{k=1}^K \theta_{ijk}^{y_{ijk}} \\ &= \exp\left\{\sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^K y_{ijk} Ln(\theta_{ijk})\right\} \quad (2) \\ &= \exp\left\{\sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^K y_{ijk} \gamma_{ijk} - ND(\gamma)\right\} \\ &= L(\gamma|\mathbf{y}) \end{aligned}$$

که در آن θ بردار شامل تمام اثرات مدل و \mathbf{y} بردار شامل تمام فراوانی‌های حجره‌ها هستند. همچنین توزیع توأم پیشین پارامترها به صورت زیر است.

$$\pi(\mathbf{U}|\Omega) \propto \exp\left\{-\frac{1}{\nu} \sigma_{\nu}^{-2} \sum_{i=1}^I (U_{\nu(i)} - U_{\nu(0)})^2 - \dots - \frac{1}{\nu} \sigma_{\nu}^{-2} \sum_{i=1}^I (U_{\nu(ijk)} - U_{\nu(000)})^2\right\} \quad (3)$$

که در آن $\Omega = \{\sigma_{\nu}^2, \sigma_{\nu}^2, \dots, \sigma_{\nu}^2\}$ بنابراین توزیع پسین به صورت زیر در می‌آید.

$$\pi^*(\mathbf{U}|\mathbf{y}, \Omega) = \frac{\pi(\mathbf{U}|\Omega) \cdot L(\gamma|\mathbf{y})}{\int_{\mathbf{u}} \pi(\mathbf{U}|\Omega) \cdot L(\gamma|\mathbf{y}) d\mathbf{u}} \quad (4)$$

ششمین همایش ملی ریاضی و آمار

<https://conf.gonbad.ac.ir/msc1404>

همان گونه که ملاحظه می شود برای محاسبه توزیع پسین باید انتگرال موجود در رابطه (۴) را حل کرد. واضح است که محاسبه این انتگرال وقت گیر و مشکل و در خیلی موارد غیر ممکن است. بنابراین برای به دست آوردن توزیع پسین به ناچار از روش زنجیر مارکوف مونت کارلو استفاده خواهیم کرد.

۳- زنجیر مارکوف مونت کارلو

روش زنجیر مارکوف مونت کارلو یک ابزار محاسباتی قوی ای است که اخیراً در علم آمار عمومیت پیدا کرده است. دلیل مهم برای عمومیت آن، توانایی به دست آوردن و محاسبه انتگرال های چندگانه و پیچیده است. یک زنجیر مارکوف یک فرآیند تصادفی $\{\theta^1, \theta^2, \dots, \theta^t\}$ است به طوری که $f(\theta^{t+1} | \theta^t, \theta^2, \dots, \theta^{t-1}, \theta^t) = f(\theta^{t+1} | \theta^t)$ به علاوه اگر $f(\theta^{t+1} | \theta^t)$ مستقل از زمان t باشد، زنجیر مانا است. سرانجام اگر زنجیر مارکوف تحویل ناپذیر و بازگشتی مثبت باشد وقتی t به سمت بی نهایت میل می کند توزیع θ^t به توزیع مانای زنجیر که مستقل از مقدار اولیه θ^0 است میل می کند (۴). برای تولید نمونه از $f(\theta | y)$ باید یک زنجیر مارکوف با دو شرط زیر وجود داشته باشد.

الف- تولید نمونه از $f(\theta^{t+1} | \theta^t)$ آسان باشد.

ب- توزیع مانای زنجیر انتخاب شده توزیع پسین هدف باشد.

پس از آن که یک زنجیر مارکوف با دو شرط بالا ایجاد شد، یک مقدار اولیه θ^0 را اختیار نموده و آن قدر نمونه تولید می شود تا توزیع مانا حاصل شود. دو روش تولید نمونه عمومیت دارند که عبارت اند از الگوریتم متروپولیس هستینگز و نمونه گیری گیبس که در این مطالعه به روش گیبس نمونه تولید شده است.

۳-۱ نمونه گیری گیبس

نمونه گیری گیبس یک روش زنجیر مارکوف مونت کارلو است که به منظور تولید نمونه یک یا چند متغیره وقتی که روش های مستقیم وجود نداشته باشد استفاده می شود (۵-۳). در نمونه گیری گیبس یک مؤلفه از توزیع شرطی کامل در هر مرحله به روز می شود. برای این منظور مراحل زیر طی می شوند.

$$1- \text{تولید } \theta_1^{t+1} \text{ از } f(\theta_1 | \theta_2^t, \theta_3^t, \dots, \theta_p^t)$$

$$2- \text{تولید } \theta_2^{t+1} \text{ از } f(\theta_2 | \theta_1^{t+1}, \theta_3^t, \dots, \theta_p^t)$$

$$3- \text{تولید } \theta_3^{t+1} \text{ از } f(\theta_3 | \theta_1^{t+1}, \theta_2^{t+1}, \theta_4^t, \dots, \theta_p^t)$$

$$p- \text{تولید } \theta_p^{t+1} \text{ از } f(\theta_p | \theta_1^{t+1}, \theta_2^{t+1}, \dots, \theta_{p-1}^{t+1})$$

که p تعداد مؤلفه های بردار پارامتری θ است.

۴- بحث و نتیجه گیری

داده های مورد بررسی در این مطالعه مربوط به توزیع نسبی جمعیت ده ساله و بیشتر بر حسب وضعیت اشتغال، جنسیت و

ششمین همایش ملی ریاضی و آمار

<https://conf.gonbad.ac.ir/msc1404>

رده سنی در سال ۱۳۹۵ در استان تهران است که از سایت مرکز آمار ایران استخراج شده و در یک جدول سه طرفه $2 \times 2 \times 2$ به صورت زیر تنظیم شده است.

جدول ۱- مقادیر مشاهده شده بر حسب وضعیت اشتغال، رده سنی و جنسیت

وضعیت اشتغال	جنسیت	رده سنی	
		کمتر از سی سال	بیشتر از سی سال
شاغل	مرد	۱۳۴۸۶۰۸	۲۳۳۳۳۵۷۸
	زن	۲۵۵۰۴۴	۳۵۹۸۱۲
بی کار	مرد	۱۹۱۴۹۸	۸۹۸۸۶
	زن	۹۲۲۵۵	۲۰۶۴۴

در این بخش مطابق توضیحات ارائه شده در بخش‌های قبل، ابتدا توزیع پیشین $N(0,0/001)$ برای تمامی پارامترها در نظر گرفته شد. به کمک نمونه‌گیری گیبس تمامی مدل‌های ممکن سلسله مراتبی برآزش و بر اساس معیار اطلاع آکائیکه (AIC) مدلی که در آن اثر متقابل سه‌تایی وجود ندارد کارآتر از سایر مدل‌ها است. همچنین بر اساس آماره آزمون خی-دو همین مدل انتخاب می‌شود. بنابراین مدل انتخابی به صورت زیر است.

$$\ln(N \theta_{ijk}) = \gamma_{ijk} = U_{1(i)} + U_{2(j)} + U_{3(k)} + U_{12(ij)} + U_{13(ik)} + U_{23(jk)}$$

در این مدل اثر تمام عوامل اصلی و تمامی اثرات متقابل دوتایی وجود دارد، به عبارت دیگر یک استقلال کامل بین سه عامل وضعیت اشتغال، جنسیت و رده سنی وجود دارد. در جداول زیر برآورد اثرات مدل انتخابی آورده شده است.

جدول ۲- برآورد اثرات اصلی مدل و انحراف معیار آن‌ها

	وضعیت اشتغال (U_1)		جنسیت (U_2)		رده سنی (U_3)	
	شاغل ($i=1$)	بی کار ($i=2$)	مرد ($j=1$)	زن ($j=2$)	زیر ۳۰ ($k=1$)	بالای ۳۰ ($k=2$)
برآورد پارامتر	۰/۳۰۵	-۰/۳۰۵	-۰/۲۰۵	۰/۲۰۵	۰/۰۱۹	-۰/۰۱۹
انحراف معیار	۰/۰۰۹	۰/۰۱۰	۰/۰۲۰	۰/۰۱۷	۰/۰۱۵	۰/۰۴۲

جدول ۳- برآورد اثرات متقابل مرتبه اول وضعیت اشتغال و جنسیت و انحراف معیار آن‌ها ($U_{12(ij)}$)

	جنسیت	وضعیت اشتغال	
		بی کار	شاغل
مرد	برآورد	-۰/۳۸۱	۰/۳۸۱
	انحراف معیار	۰/۰۳۶	۰/۰۱۹
زن	برآورد	۰/۳۸۱	-۰/۳۸۱
	انحراف معیار	۰/۰۳۴	۰/۰۱۷

جدول ۴- برآورد اثرات متقابل مرتبه اول وضعیت اشتغال و رده سنی و انحراف معیار آن‌ها ($U_{13(ik)}$)

رده سنی	وضعیت اشتغال	
	بی کار	شاغل

ششمین همایش ملی ریاضی و آمار

<https://conf.gonbad.ac.ir/msc1404>

زیر ۳۰	برآورد	۱/۰۰۷	-۱/۰۰۷
	انحراف معیار	۰/۰۰۹	۰/۰۳۱
بالای ۳۰	برآورد	-۱/۰۰۷	۱/۰۰۷
	انحراف معیار	۰/۰۰۷	۰/۰۲۹

جدول ۵- برآورد اثرات متقابل مرتبه اول جنسیت و رده سنی و انحراف معیار آن‌ها ($U_{\tau(jk)}$)

رده سنی		جنسیت	
		مرد	زن
زیر ۳۰	برآورد	-۰/۰۱۴	۰/۰۱۴
	انحراف معیار	۰/۰۲۸	۰/۰۲۶
بالای ۳۰	برآورد	۰/۰۱۴	-۰/۰۱۴
	انحراف معیار	۰/۰۳۵	۰/۰۲۹

همچنین با استفاده از بخت‌های پسین می‌توان نسبت احتمال این که فردی شاغل باشد مشروط به این که کمتر از سی سال و مرد باشد را به احتمال این که فردی بی‌کار باشد مشروط به این که کمتر از سی سال و مرد باشد را به دست آورد که این مقدار برابر است با $\frac{۰/۲۸۶}{۰/۰۴۲۳} = ۶/۷۶$ و این یعنی در گروه مردان، افراد شاغل کمتر از سی سال تقریباً $۶/۷۶$ برابر افراد بی‌کار کمتر از سی سال هستند. به طور مشابه این مقدار در گروه زنان برابر $\frac{۰/۰۵۵۸}{۰/۰۱۸۲} = ۳/۰۶$ است. نتایج نشان می‌دهد که کمترین احتمال مربوط به زنان بی‌کار بیشتر از سی سال و بیشترین احتمال مربوط به مردان شاغل بیشتر از سی سال بوده و سایر وضعیت‌ها بین این دو گروه قرار می‌گیرند. با توجه به کارایی بالای مدل‌های بیزی که البته بیشتر مواقع به واسطه پیچیدگی توزیع پسین، برآورد پارامترها فرم بسته‌ای ندارند پیشنهاد می‌شود از این روش در مدل‌بندی داده‌های رسته‌ای استفاده شود.

۵- منابع

- [1] Agresti, A. (2025). *Categorical Data Analysis*, New York, John Wiley.
- [2] Gilks, W.R., and Spiegelhalter, D.J. (1996). *Marcov Chain Monte Carlo in Practice*, London, Chapman and Hall.
- [3] Casella, G., and Geyer, E.I. (2020). Explaining the Gibbs Sampler, *The American Statistician*, 46, 167-174.
- [4] Dellaportas, P., and Forster, J.J. (2002). Marcov Chain Monte Carlo Model Determinator for Hierarchical Log-Linear Models, *Biometrika*, 86, 815-833.



ششمین همایش ملی ریاضی و آمار

<https://conf.gonbad.ac.ir/msc1404>

F-280، صص ۱۲-۱۷.

ارائه یک روش جدید نهان‌نگاری تصاویر دیجیتال بر اساس روابط آماری ضرایب تبدیل موجک گسسته تصویر و شبکه عصبی

ایوب طاهری^۱، سیمین منصوری بروجنی^۲

^۱گروه مهندسی کامپیوتر، دانشکده فناوری اطلاعات، دانشگاه پیام نور، صندوق پستی ۴۶۹۷-۱۹۳۹۵، تهران، ایران؛ ay.taheri@pnu.ac.ir
^۲گروه آمار، دانشگاه پیام نور، صندوق پستی ۴۶۹۷-۱۹۳۹۵، تهران، ایران؛ s_mansouri@pnu.ac.ir

چکیده

در این مقاله، یک روش جدید نهان‌نگاری تصاویر دیجیتال با استفاده از تکنیک شبکه عصبی BPNN و روابط آماری ضرایب تبدیل موجک گسسته ارائه شده است. شبکه عصبی ذکر شده، دارای قابلیت و سرعت یادگیری چشمگیری در سایر الگوریتم‌های نهان‌نگاری است. امضای تصویر در ضرایب تبدیل موجک تعبیه می‌شود که این امر موجب افزایش مقاومت الگوریتم در برابر حملات نهان‌نگاری، و آشکار نبودن امضا در تصویر می‌شود. شبکه عصبی در فرآیندهای تعبیه و استخراج امضا از تصویر نقش بسیار مهمی دارد و حتی پس از حملات متعدد بر روی تصویر، با استفاده از خصوصیات آماری ضرایب تبدیل موجک، امضا را از تصویر استخراج می‌کند. نتایج پیاده سازی مقاومت بالای الگوریتم را در برابر حملات نهان‌نگاری نشان می‌دهد.

کلمات کلیدی: نهان‌نگاری دیجیتال (Digital Watermarking)، شبکه عصبی (Neural Network)، تبدیل موجک گسسته (DWT).

۱- مقدمه

هدف نهان‌نگاری، مخفی‌سازی، عدم آشکار بودن و در عین حال عدم امکان حذف امضا از رسانه دیجیتال است، چرا که وجود امضا در رسانه دیجیتال، دلیلی بر اثبات مالکیت رسانه برای صاحب آن است. شبکه عصبی، خصوصیات نگاشت‌های غیرخطی، قابلیت یادگیری روابط بین ضرایب تبدیل موجک، قبل و بعد از عملیات تعبیه امضا را فراهم می‌کند. به دست آوردن این روابط تاثیر چشمگیری در بهبود استخراج امضا، حتی پس از انجام حملات متعدد اینترنتی و رسانه‌ای بر روی تصویر دارد که تحت عنوان «مقاومت نهان‌نگاری» شناخته می‌شود [۱].

۱.۱- تبدیل موجک گسسته تصویر

تبدیل موجک دو بعدی در هر مرحله تبدیل دارای چهار باند فرکانسی است: باند فرکانس پایین (LL)، باند فرکانس میانی افقی (HL)، باند فرکانس میانی عمودی (LH) و باند فرکانس بالای مورب (HH). تبدیل موجک دو بعدی می‌تواند تا چندین سطح تجزیه فرکانسی انجام شود، در هر سطح، باند فرکانس پایین مجدداً به چهار باند فرکانسی تجزیه می‌شود که یک باند فرکانس پایین (LL2) و سه باند فرکانس میانی HL2، LH2، HH2 تولید می‌شود، [۲].

امضای دیجیتال در باندهای فرکانس میانی تعبیه می‌شود، تا مقاومت الگوریتم نهان‌نگاری در برابر حملات تخریب کننده تصویر کاهش نیابد. این حملات شامل، فیلترینگ‌های فرکانسی، فشرده‌سازی تصویر، برش، تغییر اندازه ابعاد تصویر و ... است. تبدیل موجک گسسته در مقایسه با سایر تبدیل‌های فرکانسی دیگر نظیر تبدیل فوریه گسسته (DFT) و تبدیل کسینوسی

ششمین همایش ملی ریاضی و آمار

<https://conf.gonbad.ac.ir/msc1404>

گسسته (DCT) دارای انعطاف‌پذیری بهتر و تحلیل فرکانسی دقیق‌تر است [۳] و [۴].

۲.۱- شبکه عصبی

شبکه عصبی مورد استفاده در این مقاله BPNN است. شبکه عصبی دارای یک بردار ورودی، یک مقدار خروجی، و یک مقدار هدف است. مقادیر مولفه بردارها باید از سه لایه شبکه عصبی (لایه ورودی، لایه میانی، و لایه خروجی) عبور کنند. در لایه ورودی شبکه عصبی مقادیر پس از ضرب شدن در بردار وزن یال‌های وزن‌دار (سیناپس)، وارد گره‌های محاسباتی (نرون) شده و پس از انجام محاسبات، مقادیر خروجی نرون‌ها از طریق ضرب در بردار وزن سیناپس‌های میانی وارد نرون‌های لایه میانی می‌شود و پس از انجام محاسبات میانی بر روی مقادیر خروجی نهایی در نرون لایه خروجی، بردار خروجی تبدیل به یک مقدار خروجی می‌شود و با مقدار هدف مقایسه می‌شود، اگر فاصله مقدار خروجی شبکه عصبی با مقدار هدف از یک حد آستانه یا خطا کمتر باشد، فرآیند یادگیری شبکه عصبی پایان می‌پذیرد، در غیر اینصورت، سایر بردارهای وزن سیناپس‌ها باید به روز گردانی شده و کلیه مراحل یادگیری از ابتدا باید انجام شود تا خطای شبکه عصبی از حد آستانه کمتر شود و فرآیند یادگیری پایان پذیرد [۵] و [۶].

۲- الگوریتم نهان‌نگاری

تصویر به حوزه فرکانسی تبدیل مویک انتقال می‌یابد و امضا در این ضریب فرکانسی مورد نظر تعبیه شده و مجدداً تصویر به حوزه مکان منتقل می‌شود. به منظور استخراج نیز تصویر به حوزه فرکانسی منتقل شده و استخراج امضا اجرا می‌شود.

۱.۲- فرآیند تعبیه امضای دیجیتال

فرآیند شامل چهار مرحله تولید امضای دیجیتال، انتقال تصویر به حوزه تبدیل مویک گسسته دو بعدی با سه سطح تجزیه فرکانسی، کاربرد شبکه عصبی و تعبیه امضای دیجیتال در تصویر است. امضای دیجیتال اصلی یک تصویر سیاه و سفید با مقادیر درایه‌های صفر و یک است. برای جلوگیری از حملات جعل و کپی، امضای دیجیتال توسط تبدیل Arnold در هم ریخته می‌شود و سپس امضای در هم ریخته در تصویر اصلی تعبیه می‌شود. تبدیل Arnold [۷] طبق رابطه (۱) بیان می‌شود:

$$\begin{bmatrix} X' \\ Y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} \text{ mod } 6 \quad (1)$$

در این رابطه (X', Y') مختصات جدید مقدار درایه ماتریس امضای دیجیتال در مختصات (X, Y) است. مقادیر مختصات جدید بر عدد ۶۴ تقسیم شده و باقیمانده تقسیم به‌عنوان مختصات جدید مختصات درایه‌های ماتریس در نظر گرفته می‌شود، این تبدیل دارای دوره تناوب T است، یعنی بعد از T مرتبه انجام تبدیل مختصات‌ها به جای اول خود باز می‌گردند. می‌توان این تبدیل را در فرآیند تعبیه امضا $k1$ مرتبه بر روی ماتریس امضای دیجیتال انجام داد تا پس از بازیابی امضای در هم ریخته در فرآیند استخراج امضا با انجام $k2(k1 + k2 = T)$ مرتبه تبدیل Arnold بتوان امضای دیجیتال را بدست آورد. پس از آنکه ماتریس در هم ریخته امضای دیجیتال ساخته شد، ماتریس به بردار یک بعد 64×64 با $W_i, i = 1, 2, \dots, 64$ مقادیر صفرو یک تبدیل می‌شود، و به‌صورت بیت به بیت در ضرایب تبدیل مویک مربوطه تعبیه می‌شود. سه مرحله تجزیه فرکانسی تبدیل مویک گسسته دو بعدی بر روی تصویر انجام می‌شود و خروجی تبدیل ماتریس ضرایب تبدیل مویک خواهد بود. روابط آماری بین ضریب میانی تبدیل مویک و ضرایب هم‌جوار آن‌ها در ماتریس‌های 3×3 توسط شبکه عصبی BPNN به‌دست آورده می‌شود، زیرا بیت امضای دیجیتال در این ضریب تعبیه می‌شود و نیاز است تا ارتباط این ضریب با ضرایب مجاور خودش مشخص گردد، تا شفافیت و ناآشکاری امضا در تصویر تضمین شود [۱].

ششمین همایش ملی ریاضی و آمار

<https://conf.gonbad.ac.ir/msc1404>

تعداد نرون‌ها در لایه میانی طبق رابطه (۲) بیان می‌شود:

$$N = \lceil \sqrt{nm + 1.7n + 1} \rceil \quad (2)$$

در این رابطه، n تعداد نرون‌های لایه ورودی، m تعداد نرون‌های لایه خروجی است. طبق مقادیر $n = 1$ ، $m = 8$ مقدار حد بالای $N = 5$ خواهد شد. هر نرون در شبکه عصبی به صورت همبند کامل توسط سیناپس‌های وزن‌دار به نرون‌های لایه بعد متصل شده است. در شبکه عصبی BPNN، خروجی یک لایه، به عنوان ورودی لایه بعدی در نظر گرفته می‌شود. ماتریس‌های 3×3 دارای ۹ ضریب هستند که هشت ضریب به جز ضریب میانی ماتریس به عنوان بردار ورودی شبکه عصبی (x_i) در نظر گرفته می‌شود. ضریب میانی به عنوان مقدار هدف شبکه عصبی (Y_d) منظور می‌شود. مقادیر اولیه بردارهای وزن سیناپس‌ها عدد یک است. خروجی نرون‌های لایه میانی از روابط (۳) و (۴) محاسبه می‌شوند:

$$h_j = f\left(\sum_{i=1}^8 x_i g_{ij}\right) \quad (3)$$

$$a_k = f\left(\sum_{j=1}^5 h_j m_{jk}\right) \quad (4)$$

در این روابط، g_{ij} و m_{jk} به ترتیب وزن سیناپس‌های لایه ورودی، و وزن سیناپس لایه میانی هستند. h_j خروجی نرون j ام لایه میانی است. a_k ، k مین مولفه بردار خروجی لایه میانی است. f تابع فعالساز نرون‌هاست که طبق رابطه (۵) تابع Sigmoid نامیده می‌شود.

$$f(x) = \frac{1}{1 + e^{-x}} \quad (5)$$

مولفه‌های بردار خروجی طبق رابطه (۶) در نرون خروجی با یکدیگر ترکیب شده و خروجی نهایی را می‌سازند:

$$Y = \frac{\sum_{k=1}^5 a_k f(a_k)}{\sum_{k=1}^5 f(a_k)} \quad (6)$$

خروجی نهایی طبق رابطه (۷) با خروجی هدف مقایسه شده و خطای شبکه عصبی محاسبه می‌شود:

$$e = (Y_d - Y) f'\left(\sum_{j=1}^8 \sum_{k=1}^5 h_j m_{jk}\right) \quad (7)$$

در رابطه (۷)، Y_d مقدار خروجی هدف است که در الگوریتم ارائه شده ضریب میانی ماتریس ضرایب 3×3 هستند. اگر مقدار خطا از مقدار آستانه $e = 0.001$ کمتر یا مساوی شود، الگوریتم یادگیری شبکه عصبی پایان می‌پذیرد، در غیر اینصورت، وزن سیناپس‌های لایه میانی طبق روابط (۸) و (۹) به روز گردانی می‌شوند:

$$\Delta(m_{jk}) = a e h_j \quad (8)$$

$$m_{jk}(\text{new}) = m_{jk}(\text{old}) + \Delta(m_{jk}) \quad (9)$$

خطای شبکه عصبی برای لایه ورودی طبق رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$e_j = e f'\left(\sum_{k=1}^5 m_{jk} f'\left(\sum_{i=1}^8 x_i g_{ij}\right)\right) \quad (10)$$

و وزن سیناپس‌های لایه ورودی طبق روابط زیر به روز گردانی می‌شوند:

ششمین همایش ملی ریاضی و آمار

<https://conf.gonbad.ac.ir/msc1404>

$$\Delta(g_{ij}) = \alpha e_j x_i \quad (11)$$

$$g_{ij}(\text{new}) = g_{ij}(\text{old}) + \Delta(g_{ij}) \quad (12)$$

در روابط بالا α ، نرخ یادگیری شبکه عصبی است، به روز گردانی وزن‌های سیناپس‌ها را از روابط زیر محاسبه می‌کنیم:

$$m_{jk}(t+1) = m_{jk}(t) + \alpha e h_j + \eta [m_{jk}(t) - m_{jk}(t-1)] \quad (13)$$

$$g_{ij}(t+1) = g_{ij}(t) + \alpha e_j x_i + \eta [g_{ij}(t) - g_{ij}(t-1)] \quad (14)$$

در روابط فوق، η ، ضریب وابستگی به مقادیر گذشته است که مقدار آن باید در بازه $0 < \eta < 1$ باشد.

مختصات ماتریس‌هایی که در آن‌ها بیت امضای دیجیتال ذخیره شده است به صورت آرایه‌ای از زوج مرتب‌ها تحت عنوان کلید خصوصی (K_p) نزد فرستنده و گیرنده تصویر نگهداری می‌شود. رابطه (۱۵) مقدار واریانس را برای ماتریس ضرایب محاسبه می‌کند:

$$Var = \frac{1}{9} \sum_{i,j=0,\pm 1} (S_{ij} - \text{mean})^2 \quad (15)$$

$$\text{mean} = \frac{1}{9} \sum_{i,j=0,\pm 1} S_{ij} \quad (16)$$

در روابط بالا S_{ij} ضرایب تبدیل موجک موجود در ماتریس ضرایب 3×3 است.

بیت امضا طبق رابطه زیر در ضرایب تبدیل موجک گسسته تعبیه می‌شود:

$$S_{ij} = \bar{S}_{ij} + \beta(2W(i) - 1) \quad (17)$$

در رابطه (۱۷)، \bar{S}_{ij} خروجی نهایی شبکه عصبی، β ضریب مقاومت الگوریتم نهان‌نگاری و $W(i)$ بیت امضای دیجیتال (مقدار

صفر یا یک) است. ضریب مقاومت بالا، باعث افزایش مقاومت الگوریتم است، ولی باعث آشکار شدن امضا در تصویر می‌شود.

به دست آوردن مقدار β مناسب بر اساس نتایج پیاده‌سازی خواهد بود.

۲.۲- فرآیند استخراج امضای دیجیتال

طبق کلید خصوصی K_p مختصات ماتریس‌های ضرایبی که در آن‌ها بیت امضای دیجیتال تعبیه شده است، به دست آورده

می‌شوند. هشت ضریب از ماتریس 3×3 به جز ضریب میانی ماتریس به عنوان بردار ورودی شبکه عصبی، ضریب میانی به عنوان

مقدار هدف شبکه عصبی در نظر گرفته می‌شود پس از پایان یافتن الگوریتم یادگیری، خروجی نهایی شبکه عصبی برای هر

ماتریس ضرایب محاسبه شده و به مرحله استخراج بیت امضا فرستاده می‌شود.

$$W'(k) = \begin{cases} 1 & S_{ij} > \bar{S}_{ij} \\ 0 & S_{ij} \leq \bar{S}_{ij} \end{cases} \quad (18)$$

بیت امضای دیجیتال طبق رابطه (۱۸) از ضریب میانی ماتریس ضرایب استخراج می‌شود:

در این رابطه S_{ij} خروجی نهایی شبکه عصبی، S_{ij} ضریب میانی ماتریس ضرایب است. $W'(k)$ بیت امضای دیجیتال

استخراج شده است. طبق کلیدهای خصوصی $k1$ و $k2$ در امضای دیجیتال در هم ریخته استخراجی با $k2$ مرتبه تبدیل Arnold

به امضای دیجیتال مرتب تبدیل می‌شود.

ششمین همایش ملی ریاضی و آمار

<https://conf.gonbad.ac.ir/msc1404>

۳- نتایج پیاده سازی

تصویر مرد دوربین دار به عنوان تصویر اصلی در نظر گرفته شده است که در شکل ۱ آن را مشاهده می کنید. پس از پیاده سازی الگوریتم و به دست آوردن نتایج قابل قبول برای الگوریتم، مقادیر ثابت موجود در روابط ریاضی الگوریتم نهان نگاری به ترتیبی به دست آمد: نتایج پیاده سازی الگوریتم را در جدول ۱ مشاهده می کنید. تخمین مشابهت امضا برای نشان دادن میزان مقاومت الگوریتم، و معیار سیگنال به نویز تصویر امضا شده، برای نشان دادن وضوح و سلامت تصویر نسبت به تصویر اصلی پس از انجام حملات متعدد، توسط روابط (۱۹) و (۲۰) محاسبه می شود:

$$SIM(W, W') = \frac{WW'}{WW} \quad (19)$$

$$PSNR = 10 \log \left(\frac{255^2}{\frac{1}{m+n} \sum_{i,j} (OI(i,j) - WI'(i,j))^2} \right) \quad (20)$$

در رابطه (۱۹)، تصویر امضای اصلی، W' تصویر امضای استخراج شده است. عملگر نقطه به معنای جمع حاصل ضرب مقادیر درایه های نظیر به نظیر دو ماتریس است. در رابطه (۲۰)، I ماتریس تصویر اصلی و I' ماتریس تصویر امضا شده و $m = n = 512$ است.

۴- نتیجه

یک روش جدید نهان نگاری تصاویر دیجیتال بر مبنای اطلاعات آماری ضرایب حوزه تبدیل موجک تصویر ارائه شد، ضرایبی که دارای بیشترین واریانس مقدار در مجاورت خود بودند. شبکه عصبی نقش بسیار مهمی را در فرآیندهای تعبیه و استخراج امضا دارد. نتایج پیاده سازی به خوبی مقاومت و شفافیت الگوریتم را در برابر انواع حملات پردازش تصویر نشان می دهد. برای ادامه پژوهش، میتوان از شبکه عصبی سریعتر، استفاده از ضرایب بیشتری از تبدیل موجک، و نیز بیت های امضای دیجیتال بیشتر و افزایش ظرفیت الگوریتم بهره جست



تصویر امضا شده



تصویر اصلی

شکل ۱: تصاویر مرد دوربین دار

جدول ۱: نتایج پیاده سازی و مقایسه برای تصویر مرد دوربین دار

الگوریتم [۸]		الگوریتم پیشنهادی		نوع حمله
PSNR	SIM	PSNR	SIM	
۳۱/۴۴	۹۳/۵	۱۵/۳۲	۹۴/۴	نویز گوسی
-	-	۳۱/۰	۹۲/۵	فیلتر پایین گذر
۳۲/۷	۸۵/۹۵	۳۰/۷	۹۸/۱	فیلتر میان گذر
۲۸/۵	۸۸/۱	۲۷/۳	۸۴/۵	تغییر ابعاد با نسبت یک به پنج
۳۷/۷	۹۱/۲	۳۸/۲	۹۶/۰	JPEG 90%
۳۵/۵	۸۹/۴	۳۷/۲	۹۳/۷	JPEG 50%



ششمین همایش ملی ریاضی و آمار

<https://conf.gonbad.ac.ir/msc1404>

۲۹/۸	۸۶/۳	۳۳/۰	۹۰/۰	JPEG 25%
۲۴/۱	۸۱/۲	۲۴/۲	۸۷/۲	JPEG 10%
-	-	۲۲/۰	۸۳/۷	JPEG 2000

۵- مراجع

- [1] Rishi Sinhal, Deepak Kumar Jain, Irshad Ahmad Ansari; *Machine learning based blind color image watermarking scheme for copyright protection*, Pattern Recognition Letters, 145, 171-177, 2021.
- [2] G Suresh, G Bhuvanewari, G Manikandan, P Shanthakumar; *Chronological bald eagle optimization based deep learning for image watermarking*, Expert Systems with Applications, 238, 121545, 2024.
- [3] Makram W. Hatoum, Jean-François Couchot, Raphaël Couturier, Rony Darazi; *Using Deep learning for image watermarking attack*, Signal Processing: Image Communication, 90, 116019, 2021.
- [4] Ankit Rajpal, Anurag Mishra, Rajni Bala; *A Novel fuzzy frame selection based watermarking scheme for MPEG-4 videos using directional learning machine*, Applied Soft Computing, 74, 603-620, 2019.
- [5] Seung-Min Mun, Seung-Hun Nam, Haneol Jang, Dongkyu Kim, Heung-Kyu Lee; *robust domain from attacks: A learning framework for blind watermarking*, Neurocomputing, 337, 191-202, 2019.
- [6] Zhenyu Li, Hao Zhang, Xilin Liu, Chunpeng Wang, Xingyuan Wang; *Blind and safety-enhanced dual watermarking algorithm with chaotic system encryption based on RHFM and DWT-DCT*, Digital Signal Processing, 115, 103062, 2021.
- [7] Konka Kishan, B. Vijay Kumar; *Efficient large invisible color watermark embedding using conditional deep autoencoder model for applications*, Measurement: Sensors, 29, 100850, 2023.
- [8] Taheri Ayoub; *Hybrid and Invisible Digital Image Watermarking Technique Using IWT-DCT and Hopfield Neural Network*, Iraqi Journal for Electrical And Electronic Engineering, 19(2), 2023.

ششمین همایش ملی ریاضی و آمار

<https://conf.gonbad.ac.ir/msc1404>

F-281, صص ۱۸-۲۳.

نهان‌نگاری تصاویر دیجیتال قوی، سازگار و کور مبتنی بر یادگیری ماشین
فوق سریع (ELM) با استفاده از روش ترکیبی DWT-DCTایوب طاهری^۱، سیمین منصوری بروجنی^۲

^۱گروه مهندسی کامپیوتر، دانشکده فناوری اطلاعات، دانشگاه پیام نور، صندوق پستی ۴۶۹۷-۱۹۳۹۵، تهران، ایران، ay.taheri@pnu.ac.ir
^۲گروه آمار، دانشگاه پیام نور، صندوق پستی ۴۶۹۷-۱۹۳۹۵، تهران، ایران، s_mansouri@pnu.ac.ir

چکیده

در این مقاله، یک طرح نهان‌نگاری کور (Blind) مبتنی بر معیارهای ارزیابی چندگانه برای نهان‌نگاری تصاویر خاکستری با استفاده از یادگیری ماشین فوق سریع منظم وزندار (WRELM) پیشنهاد شده است. تبدیل موجک گسسته (DWT) در سطح اول بر روی سه تصویر آزمون استاندارد اعمال می‌شود. در ابتدا WRELM با تعداد ثابتی از داده‌های آموزشی مورد استفاده در فاز اولیه و اندازه بلوک داده‌ای که در هر گام یادآموزش داده شده، تنظیم می‌شود. مجموعه یادگیری با انجام تبدیل کسینوس گسسته (DCT) روی زیر-باند LLL که قبلاً به بلوک‌های ۸×۸ ضرب DCT تقسیم شده است، ایجاد می‌گردد. نه ضریب با بیشینه مقدار از هر بلوک DCT که به روش زیگزگ انتخاب شده‌اند، به عنوان مجموعه یادگیری در نظر گرفته می‌شوند که به WRELM برای آموزش داده می‌شوند. ویژگی‌های سیستم بینایی انسان (HVS) و ارزیابی‌های آنتروپی ضرایب DCT، معیارهای ارزیابی ما هستند که حاصل آموزش WRELM می‌باشند. بردار ورودی WRELM، یک آرایه با ۸ ضریب از مجموعه آموزشی (به غیر از ضریب میانی) است. هدف WRELM، یک بردار مرتبط با بردار ورودی با ۸ مقدار معادل ضریب میانی مجموعه آموزشی است. فرآیند استخراج از نوع کور است، به این معنی که برای استخراج بیت‌های امضا به تصویر اصلی نیاز نیست. نتایج، کیفیت بصری بالای تصاویر امضا شده و قابلیت مقایسه عالی بیت امضاها استخراج شده و اصلی را از تصاویر امضا شده و تحت حمله را نشان می‌دهند. مقادیر PSNR و SIM نیز در هر دو حالت تصاویر امضا شده و تحت حمله، بهینه مشاهده شده‌اند.

کلمات کلیدی: DWT, DCT, WRELM، نهان‌نگاری تصاویر دیجیتال.

۱- مقدمه

نهان‌نگاری دیجیتال به عنوان راه‌حلی برای مالکیت و حفاظت از حق کپی‌رایت محتوای دیجیتال و جلوگیری از دستکاری غیرقانونی و غیرمجاز محصولات چندرسانه‌ای در نظر گرفته می‌شود. حفاظت از محتوا در نهان‌نگاری دیجیتال با تعبیه اطلاعات پوششی به نام امضا به صورت غیرمحسوس انجام می‌شود، به طوری که کیفیت تصویر پوششی تنزل نمی‌کند [۱-۳]. در کارهای ارائه شده توسط بسیاری از محققان [۴] مشاهده شده که تکنیک‌های حوزه فرکانس، غیرمحسوس‌تر و قوی‌تر از حوزه مکان هستند. در چند دهه اخیر، مشهود است که رویکردهای مبتنی بر شبکه‌های عصبی [۵، ۶] و یادگیری ماشین [۷، ۸] بیشتر در حوزه نهان‌نگاری تصاویر دیجیتال برای افزایش غیرمحسوس و قوی مورد استفاده قرار گرفته‌اند [۶، ۸].

کارایی و اثربخشی یادگیری ماشین فوق سریع (ELM) برای مسائل طبقه‌بندی و رگرسیون قبلاً مورد تحلیل قرار گرفته است [۹]. طرح پیشنهادی از الگوریتم یادگیری ماشین به نام WRELM استفاده می‌کند که هر ضریب DCT انتخاب شده را بر اساس ارزیابی‌های آنتروپی همراه با ویژگی‌های HVS استخراج شده در حوزه DCT توسط WRELM در نظر می‌گیرد. رویکرد پیشنهادی بر روی نهان‌نگاری تصویر خاکستری با استفاده از WRELM و روش ترکیبی حوزه فرکانس DWT-DCT متمرکز است. در ابتدا، با توجه به اطلاعات موجود، بلوک‌ها با در نظر گرفتن آنتروپی و ویژگی‌های HVS برای تعبیه امضای بیت‌های باینری انتخاب

ششمین همایش ملی ریاضی و آمار

<https://conf.gonbad.ac.ir/msc1404>

می‌شوند. دوم، ضرایب DCT دارای بیشینه انرژی برای ایجاد مجموعه داده آموزشی و آزمایشی استفاده می‌شوند. سوم، اطلاعات پوشش در خروجی مجموعه داده آزمایشی که توسط WRELM آموزش دیده پیدا شده است.

۲- طراحی طرح

۱.۲-DCT و DWT

در پردازش تصویر دو بعدی، اعمال DWT با پردازش تصویر توسط فیلتر دو بعدی در هر بعد مرتبط است [۱۰]. در مرحله اول تصویر اصلی را به چهار زیر-باند تصویری چند-وضوحی و غیر هم‌پوشان توسط DWT تجزیه می‌کند: سه جزء با فرکانس بالا (HL, LH, HH) که زیرتصاویر جزئیات نامیده می‌شوند و یک جزء با فرکانس پایین (LL) که زیرتصویر تقریبی نامیده می‌شود و ترکیبی از ثبات تصویر اصلی است. در یک زیرتصویر، بخش عمده‌ای از انرژی تصویر روی آن متمرکز شده و استحکام زیرتصویر تقریبی از زیرتصاویر جزئیات بهتر است.

DCT دو بعدی به دلیل قابلیت فوق‌العاده فشرده‌سازی انرژی از طریق ضرایب و ناهمبسته‌سازی، که با ارزیابی آنتروپی مرتبط است، در فشرده‌سازی تصویر استفاده می‌شود. اگر تصویری با اندازه 8×8 با DCT تبدیل شود، یک ضریب DC و ۶۳ ضریب AC ایجاد می‌کند. ضریب DC که دارای بزرگترین دامنه است، با پیمایش زیگزاگ ضرایب AC پس از DC، می‌توان آن‌ها را به ترتیب نزولی مرتب کرد. نه ضریب اول به عنوان مجموعه داده آموزشی برای WRELM انتخاب می‌شوند.

۲.۲-WRELM

ساختار شبکه WRELM در لایه پنهان‌آمبرای N نمونه آموزشی مجزا (x_i, y_i) که در آن $x_i = [x_{i,1}, x_{i,2}, \dots, x_{i,N}]^T$ و $y_i = [y_{i,1}, y_{i,2}, \dots, y_{i,N}]^T$ لایه پنهان هستند. برای برآوردن ویژگی‌های HVS و ارزیابی‌های آنتروپی ضرایب DCT در هر بلوک DCT، WRELM برای کمینه‌سازی تابع لاگرانژی هدف L به صورت زیر اعمال می‌شود:

$$L(\beta, \varepsilon, \alpha) = \frac{S}{2} \|I\varepsilon\|^2 + \frac{\gamma}{2} \|\beta_i\|^2 - \sum_{j=1}^N \alpha_j \left(\sum_{i=1}^N \beta_{i,j} g\left(\sum_{k=1}^N w_{i,k,j} x_{i,j}\right), b_{i,j} \right) - t_j - \varepsilon_j \quad (1)$$

$$= \frac{S}{2} \|I\varepsilon\|^2 + \frac{\gamma}{2} \|\beta_i\|^2 - \alpha(H(x_i)\beta_i - t - \varepsilon)$$

در معادله (۱)، برای هر لایه پنهان در WRELM، I ماتریس واحد، $x_{i,j}$ نمونه‌های i ام بردار ورودی، t بردار هدف ثابت، ε بردار خطا بین بردار ورودی و هدف، N طول بردار ورودی و تعداد لایه‌های پنهان، $\gamma = 37.7$ فاکتور وزن برای شبیه‌سازی ویژگی‌های HVS [۸]، β_i ماتریس وزن‌های خروجی تنظیم شده توسط ویژگی‌های HVS، S ماتریس کوانتیزاسیون ارزیابی آنتروپی، α بردار ضرایب لاگرانژ برای ارزیابی آنتروپی، g تابع سیگموئید، w ماتریس وزن‌های ورودی و b بردار آریبی است. ماتریس تابع فعال‌سازی H در هر لایه پنهان به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$H(x_i) = \begin{bmatrix} g\left(\sum_{k=1}^N w_{i,k,1} x_{i,1}\right), b_{i,1} & \dots & g\left(\sum_{k=1}^N w_{i,k,1} x_{i,1}\right), b_{i,1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g\left(\sum_{k=1}^N w_{i,k,N} x_{i,N}\right), b_{i,N} & \dots & g\left(\sum_{k=1}^N w_{i,k,N} x_{i,N}\right), b_{i,N} \end{bmatrix} \quad (2)$$

ششمین همایش ملی ریاضی و آمار

<https://conf.gonbad.ac.ir/msc1404>

$$Hg\left(\left(\sum_{k=1}^N w_{i,k,j} x_{i,j}\right), b_{i,j}\right) = \frac{1}{1 + \exp\left(-\left(\sum_{k=1}^N w_{i,k,N} x_{i,j} + b_{i,N}\right)\right)} \quad (3)$$

شرایط بهینگی زیر با صفر قرار دادن مشتقات جزئی دستگاه معادلات به دست می آید:

$$\frac{\partial L}{\partial \beta} = 0 \Rightarrow \gamma \beta_i = H(x_i)^T \alpha, \quad \frac{\partial L}{\partial \varepsilon} = 0 \Rightarrow \alpha = S\varepsilon, \quad \frac{\partial L}{\partial \alpha} = 0 \Rightarrow H(x_i)\beta_i - t - \varepsilon = 0 \quad (4)$$

مقادیر بهینه برای بردارهای α و β زمانی به دست می آیند که مقادیر زیر برای آن‌ها در نظر گرفته شود:

$$\alpha = S\varepsilon \quad \beta_i = (\gamma I + H^T(x_i)SH(x_i))^{-1}H^T(x_i)St \quad (5)$$

که در آن T ماتریس انتقال است و S شامل N بردار معادل است که با نمونه‌های ورودی کوانتیزه شده x پر شده‌اند، که در آن:

$$S = \begin{pmatrix} x_{i,1} & \dots & x_{i,1} \\ Q_{i,1} & \dots & Q_{i,1} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ x_{i,N} & \dots & x_{i,N} \\ Q_{i,N} & \dots & Q_{i,N} \end{pmatrix} \quad (6)$$

مقادیر مناسب برای Q به صورت زیر به دست می آید:

$$Q_{i,j} = \begin{cases} b_{i,j} & b_{i,j} \leq \frac{x_{i,j}}{2} \\ 1 & \text{else} \end{cases} \quad (7)$$

که در آن $b_{i,j}$ عضو λ بردار اریب در لایه پنهان است. این مقادیر کوانتیزاسیون، بردارهای ورودی را برای ارزیابی آنتروپی مقیاس می دهند. الگوریتم یادگیری شبکه WRELM به شرح زیر است: مقادیر ماتریس وزن‌های ورودی (w) و بردار اریبی (b) لایه‌های پنهان به صورت تصادفی در هر لایه پنهان مطابق معادله (۸) تولید می شوند.

$w_{i,k,j}$ = مقادیر تصادفی حقیقی در بازه (0,1).

$$b_{i,j} = \begin{cases} \text{random_values} \in \mathbb{R}in\left(\frac{\sum_{k=1}^N w_{i,k,j} x_j}{N}, \left(1 - \frac{\sum_{k=1}^N w_{i,k,j} x_j}{N}\right) x_j\right) & \text{if } \frac{\sum_{k=1}^N w_{i,k,j} x_j}{N} \leq \frac{1}{2} \\ \text{andom_values} \in \mathbb{R}in\left(\left(1 - \frac{\sum_{k=1}^N w_{i,k,j} x_j}{N}\right) x_j, \frac{\sum_{k=1}^N w_{i,k,j} x_j}{N}\right) & \text{if } \frac{\sum_{k=1}^N w_{i,k,j} x_j}{N} > \frac{1}{2} \end{cases} \quad (8)$$

ماتریس خروجی لایه پنهان $H(x_i)$ بر اساس معادلات (۲) و (۳) محاسبه می شود. ارزیابی آنتروپی لایه α ، و وزن خروجی WRELM یعنی β به عنوان ماتریس ویژگی HVS بر اساس معادله (۵) محاسبه می شود. مقادیر بردارهای α ، b ، β ، w ، H ، S در هر مرحله آموزش در هر لایه پنهان به روزرسانی می شوند. خروجی‌های هر لایه پنهان به عنوان نمونه‌های ورودی برای لایه پنهان بعدی در نظر گرفته می شوند. پس از اتمام N مرحله آموزش، در لایه پنهان N ام، بردار خروجی $y_{N,j}$ برای هر نمونه آموزش دیده نهایی ($j = 1, 2, \dots, N$) مطابق معادله (۹) محاسبه می شود.

$$y_{N,j} = \alpha_{N,j} \left(\sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^N H(x_N) \beta_{N,k,i} \right) \quad (9)$$

پس از پایان N مرحله آموزش، خروجی نهایی شبکه تک‌مقدار به صورت زیر محاسبه می شود:

$$\text{final output} = \frac{\sum_{j=1}^N y_{N,j}}{N} \quad (10)$$

۳-۲- فرآیند تعبیه: اعمال DWT در سطح یک روی تصویر اصلی 1024×1024 ، انتخاب زیر-باندها LL1 با اندازه 512×512 ، تقسیم آن به بلوک‌های 8×8 ، اعمال DCT روی هر بلوک، در نتیجه به 64×64 بلوک DCT غیر هم‌پوشان می‌رسیم. برای یادگیری WRELM، $N=8$ را انتخاب می‌کنیم. بردار هدف Y با اندازه 8×1 ، با مقدار یکسان پر می‌شود که برابر با مقدار

ششمین همایش ملی ریاضی و آمار

<https://conf.gonbad.ac.ir/msc1404>

ضریب DCT میانی برای هر بردار 9×1 است. ضرایب DCT فرکانس پایین موثر هر بلوک به صورت پیمایش زیگزاگ انتخاب می‌شوند. ۸ ضریب DCT دیگر بردار 9×1 ، به عنوان بردار نمونه ورودی x در اولین لایه پنهان تنظیم می‌شوند. پس از ۸ مرحله آموزش، برای هر ضریب میانی $CNT(i,j)$ در هر بردار نمونه، WRELM مقدار آموزش دیده و پیش‌بینی شده را به عنوان خروجی نهایی ($Predicted_{CNT(i,j)}$) می‌دهد. بر اساس معادله زیر، امضا بیت در ضریب مرکزی تعبیه می‌شود:

اگر امضا بیت = ۱ باشد:

$$CNT(i, j) = \max(CNT(i, j), Predicted_{CNT(i, j)} + \rho) \quad (11)$$

در غیر این صورت:

$$CNT(i, j) = \min(CNT(i, j), Predicted_{CNT(i, j)} - \rho) \quad (12)$$

که در آن ρ فاکتور مقیاس تعبیه امضا است که مقدار ثابتی دارد. مقدار ρ از طریق آزمایش‌های گسترده روی تعدادی تصویر به دست آمده و بنابراین تعادل بین غیرمحمسوسی و مقاومت را حفظ می‌کند. $\rho = 11.25$ را به دست آورده‌ایم. پس از تعبیه امضا، DCT معکوس (IDCT) روی هر بلوک DCT 8×8 انجام می‌شود و بلوک DWT 8×8 به دست می‌آید. تمام بلوک‌های DWT برای تشکیل زیر-باند LL1 ادغام می‌شوند، سه زیر-باند دیگر (HL, LH, HH) کنار هم قرار می‌گیرند و DWT معکوس (IDWT) روی آن‌ها انجام می‌شود تا تصویر امضا شده نهایی در حوزه مکان به دست آید.

۴،۲ - فرآیند استخراج

فرآیند استخراج از نوع کور است، به این معنی که برای استخراج بیت‌های امضا به تصویر اصلی نیاز نیست. مشابه فرآیند تعبیه، بردارهای ضرایب DCT فرکانس پایین 9×1 برای تصویر امضا شده تحت حمله آماده می‌شوند. مشابه مراحل (۲) و (۳) فرآیند تعبیه، بردار نمونه‌های ورودی و بردار هدف WRELM برای تصویر امضا شده تحت حمله آماده شده و خروجی نهایی شبکه WRELM به عنوان ($Predicted_{ACNT(i,j)}$) برای هر ضریب میانی هر بردار برای تصویر امضا شده تحت حمله به نام $ACNT(i,j)$ به دست می‌آید. بر اساس معادله زیر، امضا بیت استخراج می‌شود:

$$The\ watermark\ bit = \begin{cases} 1 & ACNT(i, j) > Predicted_{ACNT(i, j)} \\ 0 & else \end{cases} \quad (12)$$

تمام بیت‌های امضا برای بازسازی تصویر امضا استخراج شده جمع‌آوری می‌شوند.

۳- پیاده‌سازی و نتایج

به منظور پایش عملکردهای بخش‌های قبل، تصاویر اصلی و امضا شده در شکل ۱ نشان داده شده‌اند. تصویر امضا اصلی در شکل ۲ نشان داده شده است. امضا اصلی یک تصویر باینری و با اندازه 64×64 در نظر گرفته شده است. به منظور مقایسه نتایج با کارهای قبلی در [۱۰، ۱۱]، معیار شباهت (SIM) بین تصویر امضا استخراج شده و تصویر امضا اصلی، و همچنین نسبت سیگنال به نویز پیک (PSNR) بین تصویر امضا شده (WI) و تصویر اصلی (OI) را در نظر گرفته‌ایم. در معادله (۱۴)، OW و EW به ترتیب نشان‌دهنده امضا اصلی و تصویر امضا استخراج شده از الگوریتم استخراج هستند. همچنین ابعاد تصاویر 1024×1024 است. بنابراین در معادله (۱۵)، $m = n = 1024$. باید توجه داشت که مقادیر SIM بالاتر منجر به مقاومت بیشتر نهم‌نگاری، و مقادیر PSNR بالاتر به معنی شفافیت ادراکی بیشتر نهم‌نگاری می‌شود. باید معیاری برای تعادل بین این دو پارامتر داشته باشیم. در اینجا، آموزش WRELM را برای این تصمیم‌گیری انتخاب کرده‌ایم. نتایج تجربی در جدول ۱ گزارش شده است.

$$SIM(OW, EW) = \frac{OW \cdot EW}{OW^2} \times 100 \quad (14)$$

ششمین همایش ملی ریاضی و آمار

<https://conf.gonbad.ac.ir/msc1404>

$$PSNR = 10 \log \left(\frac{255^2}{\frac{1}{m \times n} \sum_{i,j} (OI(i,j) - WI(i,j))^2} \right) \quad (15)$$

۴- نتیجه گیری

این مقاله به بررسی پیاده سازی WRELM برای نهان نگاری تصویر خاکستری با استفاده از مسئله رگرسیون می پردازد. تصاویر خاکستری با استفاده از روش ترکیبی DWT-DCT به حوزه فرکانس تبدیل می شوند. باند فرکانس پایین DWT و ضرایب کم فرکانس DCT برای تعبیه امضا استفاده می شوند. نتایج شبیه سازی نشان می دهد که الگوریتم امضا مبتنی بر WRELM با غیرمحسوسی بهتر و مقاومت بالا در برابر انواع حملات عمل می کند. الگوریتم یادگیری مبتنی بر WRELM دارای ظرفیت تعمیم دهی بالایی است زیرا نه تنها تمایل به رسیدن به کمترین خطای آموزشی دارد، بلکه به کوچک ترین نرم وزن خروجی نیز می رسد و این منجر به نوآوری طرح نهان نگاری می شود.



تصویر مضا شده

تصویر اصلی

شکل ۱: تصاویر باربارا



شکل ۲: تصویر امضا

جدول ۱: نتایج پیاده سازی و مقایسه ها برای تصویر باربارا

Kinds of Attack on Cameraman image	Proposed Method		Method in [10]		Method in [11]	
	PSNR	SIM	PSNR	SIM	PSNR	SIM
Gaussian Noise	37.8	96.4	27	98.3	32.9	93.8
Low Pass Filter	44.5	94.9	25.8	92.8	40.9	90.7
Median Pass Filter	53.2	97.6	27.4	95.7	50.0	96.9
Scaling 1/5	25.1	79.4	20.0	86.3	24.2	77.9
Jpeg 75%	54.1	100	37.4	98.9	52.0	100
Jpeg 25%	48.5	99.6	34.7	94.5	43.5	95.5
Jpeg 10%	38.2	93.6	28.2	91.2	35.4	90.6
Jpeg 2000 with bitrate 3	27.3	91.3	19.4	88.1	27.6	86.1

۵- مراجع

- [1] G Suresh, G Bhuvanewari, G Manikandan, P Shanthakumar; *Chronological Bald Eagle Optimization Based Deep Learning for Image Watermarking*, Expert Systems with Applications, Volume 238, Part C, 121545, ISSN 0957-4174, 2024.
- [2] Seung-Min Mun, Seung-Hun Nam, Haneol Jang, Dongkyu Kim, Heung-Kyu Lee; *Finding Robust Domain from Attacks: A Learning Framework for Blind Watermarking*, Neurocomputing, Volume 337, pp:191-202, ISSN 0925-2312, 2019.
- [3] Makram W. Hatoum, Jean-François Couchot, Raphaël Couturier, RonyDarazi; *Using Deep learning for image*



ششمین همایش ملی ریاضی و آمار

<https://conf.gonbad.ac.ir/msc1404>

- watermarking attack, Signal Processing: Image Communication*, Volume 90, 116019, ISSN 0923-5965, 2021.
- [4] Shaocheng Han, MengdieLv, Zheng Cheng; *Dual-color Blind Image Watermarking Algorithm Asing the Graph-based Transform in the Stationary Wavelet Transform Domain*, *Optik*, Volume 268, 69832, ISSN 0030-4026, 2022.
- [5] Sheng Yuan, Denis Adrian Magayane, Xuemei Liu, Xin Zhou, Guiming Lu, Zhen Wang, Hongtao Zhang, Zhongyang Li; *A Blind Watermarking Scheme based on Computational Ghost Imaging in Wavelet Domain*, *Optics Communications*, Volume 482, 126568, ISSN 0030-4018, 2021.
- [6] J. Lu, J. Ni, W. Su and H. Xie; *Wavelet-Based CNN for Robust and High-Capacity Image Watermarking*, *IEEE International Conference on Multimedia and Expo (ICME)*, pp: 1-6, 2022.
- [7] Zhenyu Li, Hao Zhang, Xilin Liu, Chunpeng Wang, Xingyuan Wang; *Blind and Safety-enhanced Dual Watermarking Algorithm with Chaotic System Encryption based on RHFM and DWT-DCT*, *Digital Signal Processing*, Volume 115, 103062, ISSN 1051-2004, 2021.
- [8] J. Lu, J. Ni, W. Su and H. Xie; *Wavelet-Based CNN for Robust and High-Capacity Image Watermarking*, *IEEE International Conference on Multimedia and Expo (ICME)*, pp: 1-6, 2022.
- [9] Anurag Mishra, Ankit Rajpal, Rajni Bala; *Bi-directional Extreme Learning Machine for Semi-blind Watermarking of Compressed Images*, *Journal of Information Security and Applications*, Volume 38, pp:71-84, ISSN 2214-2126, 2018.
- [10] Taheri, Ayoub; *A Hybrid Digital Image Watermarking based on Discrete Wavelet Transform, Discrete Cosine Transform and General Regression Neural Network*, *IJERSTE* Vol. 3, Issue 11, pp: 18-28, 2014.
- [11] Taheri, Ayoub; *Hybrid and Adaptive Block Based Watermarking Algorithm Using DWT-DCT and Artificial Neural Network*, *IJERMCA* Vol. 4, Issue 9, pp: 22-35, 2015.

ششمین همایش ملی ریاضی و آمار

<https://conf.gonbad.ac.ir/msc1404>

F-305, صص ۲۴-۲۹

تحول نقش مدرسان درس ریاضیات در آموزش عالی تحت تأثیر تدریس به کمک فناوری‌های نوین آموزشی

مریم فضل الهی علمداری

استادیار گروه علوم پایه، دانشگاه ملی مهارت، تهران، ایران؛ m.fazlollahi.a@gmail.com

چکیده

امروزه، آموزش نقش مهمی در رشد اقتصادی، اجتماعی، فرهنگی و حتی سیاسی هر کشوری ایفا می‌کند. در سال‌های اخیر، پیشرفت‌های چشمگیر در فناوری‌های آموزشی، فرصت‌های جدیدی را برای متحول کردن سیستم‌های آموزشی و ارتقای یادگیری دانشجویان ایجاد کرده است. این تحول، مدل‌های تدریس و یادگیری مرسوم را به‌طور چشمگیری مختل نموده لذا تدریس و یادگیری بیش از هر زمان دیگری به‌طور مداوم در حال تکامل هستند. هدف این مطالعه، ترکیب یافته‌های تحقیقاتی موجود برای ارزیابی چگونگی تأثیر فناوری‌های آموزشی بر نتایج یادگیری است. ما از یک استراتژی جستجوی جامع در چندین مقاله برای جمع‌آوری مطالعات منتشر شده استفاده کردیم. تحقیقات، تأثیر مثبت آموزش مبتنی بر فناوری را بر نتایج یادگیری دانشجویان برجسته می‌کند و خاطرنشان می‌سازد دانشجویانی که با فناوری آموزشی درگیر می‌شوند، سطوح بالاتری از یادگیری، نگرش بهبود یافته نسبت به یادگیری، افزایش تعامل و انگیزه و عملکرد بهتر در ارزیابی‌ها را نشان می‌دهند. این یافته بسیار مهم است، زیرا همبستگی مستقیمی بین استفاده از فناوری در آموزش و بهبود نتایج یادگیری برقرار می‌کند و نشان می‌دهد که ادغام مؤثر فناوری می‌تواند به‌عنوان یک عامل افزایش‌دهنده قابل توجه کیفیت آموزش عمل کند اما موفقیت آن منوط به اجرای متفکرانه، هماهنگی آموزشی و حمایت مداوم از مدرسان است.

کلمات کلیدی: فرآیند یادگیری ریاضیات؛ فناوری آموزشی؛ عصر دیجیتال.

۱- مقدمه

چشم‌انداز آموزش عالی در ریاضیات تحت تأثیر پیشرفت‌های سریع در فناوری‌های دیجیتال و نیازهای متنوع و جهانی دانشجویان، دستخوش تحول عمیقی است. در حالی که روش‌های سنتی تدریس ریاضیات در برخی زمینه‌ها همچنان مؤثر هستند، اغلب در ارائه پشتیبانی شخصی و بازخورد فوری، به‌ویژه در زمینه‌هایی که نیاز به مطالعه عمیق، تفکر انتقادی و مهارت‌های تحلیلی دارند، کافی نیستند. این حوزه‌ها، که شامل موضوعاتی مانند خلاقیت، تحلیل انتقادی و مطالعات اجتماعی و فرهنگی می‌شوند، بدون پشتیبانی کافی برای دانشجویان چالش‌برانگیز می‌شوند. این امر باعث افزایش علاقه به راه‌حل‌های نوآورانه برای افزایش تجربه یادگیری و بهینه‌سازی نتایج آموزشی در این حوزه‌ها شده است [1].

ظهور ابزارها و نوآوری‌های دیجیتال مانند سیستم‌های مدیریت یادگیری، تجزیه و تحلیل داده‌ها و هوش مصنوعی، تجربه دانشجویان، شیوه‌های تدریس را متحول کرده است [2]. انقلاب دیجیتال در آموزش عالی فقط مربوط به استفاده از سخت‌افزار و نرم‌افزار نیست؛ بلکه شامل تحولات فرهنگی و پارادایمی در آموزش-یادگیری نیز می‌شود. این تغییر، فرصت‌های فوق‌العاده و چالش‌های جدی را برای مدرسان، دانشجویان و مدیران آموزش به ارمغان می‌آورد [17]. انقلاب دیجیتال یک پدیده مداوم است که در آن پیشرفت‌های فناوری دائماً در حال تغییر و تأثیر بر نحوه زندگی، کار، ارتباط و یادگیری ما هستند. این پدیده فرصت‌های بزرگی برای نوآوری و پیشرفت ایجاد کرده است، اما چالش‌های جدیدی را نیز ایجاد می‌کند که باید بر آن‌ها غلبه کرد [18].

ششمین همایش ملی ریاضی و آمار

<https://conf.gonbad.ac.ir/msc1404>

انقلاب دیجیتال همچنان در آینده‌ای قابل پیش‌بینی بر آموزش تأثیر خواهد گذاشت و درک عمیق این پدیده برای مقابله با تغییرات مداوم در این عصر دیجیتال ضروری است [7]. قبل از انقلاب دیجیتال، آموزش عالی با آموزش سنتی حضوری مبتنی بر سخنرانی‌ها، کتاب‌های درسی و امتحانات مشخص می‌شد. آموزش معمول شامل انتقال اطلاعات از طریق سخنرانی‌ها به دانشجویان غیرفعال و یادداشت‌برداری است. دانشجویان به‌طور مستقل روی تکالیف کار می‌کنند و امتحانات سطح بالا را برای نشان دادن دانش خود تکمیل می‌کنند. بحث‌های کلاسی، کار گروهی و تدریس به سبک سمینار کمتر رایج هستند [17]. داده‌های مربوط به اثربخشی دوره عمدتاً به ارزیابی دانشجو در پایان دوره بستگی دارد. با این حال، با ورود به عصر دیجیتال، نقش داده‌ها در شکل‌دهی به شیوه‌های تدریس و یادگیری دستخوش تغییرات انقلابی شده است. فناوری دیجیتال امکان جمع‌آوری و تجزیه و تحلیل دقیق‌تر و بلادرنگ داده‌ها را فراهم می‌کند که به‌طور متوالی به مدرسان این امکان را می‌دهد تا بینش عمیق‌تری نسبت به فرآیندهای یادگیری دانشجویان به دست آورند و اقدامات به‌موقع‌تر و هدفمندتری انجام دهند [19]. داده‌های فردی دانشجویان اکنون شامل مواردی بیش از نمرات نهایی است. با ابزارها و پلتفرم‌های مختلف یادگیری آنلاین، مدرسان می‌توانند فعالیت دانشجویان، مانند تعامل با مطالب، زمان صرف شده برای هر تکلیف و الگوهای یادگیری را پیگیری کنند. به عبارت دیگر، اکنون می‌توان سریع‌تر به داده‌های تکوینی و تشخیصی دسترسی پیدا کرد، بنابراین مدرسان می‌توانند بازخوردهای خاص‌تر و جزئی‌تری را در طول فرآیند یادگیری به دانشجویان ارائه دهند و به آن‌ها در درک نقاط قوت و ضعف خود کمک کنند. علاوه بر این، داده‌های جمع‌آوری‌شده از کل دوره می‌تواند برای ارزیابی اثربخشی آموزش به‌صورت جامع مورد استفاده قرار گیرد. مدرسان می‌توانند چنین داده‌هایی را برای شناسایی روندهای عملکرد دانشجویان، درک جنبه‌هایی که ممکن است نیاز به بهبود در طراحی دوره داشته باشند، و حتی اندازه‌گیری تأثیر نوآوری در تدریس، تجزیه و تحلیل کنند [13].

هدف این بررسی، بررسی انتقادی تحقیقات موجود در مورد تأثیر فناوری آموزشی بر نتایج یادگیری ریاضیات در بخش آموزش عالی است. این بررسی با ترکیب یافته‌های طیف وسیعی از مطالعات تجربی، به دنبال شناسایی الگوها، مضامین و شکاف‌های رایج است و از این طریق، مروری جامع بر چگونگی تأثیر فناوری‌های آموزشی مختلف بر یادگیری و پیشرفت تحصیلی دانشجویان ارائه می‌دهد. این مقدمه به بررسی اهمیت فناوری آموزشی در افزایش نتایج یادگیری ریاضیات می‌پردازد و به سوالات زیر پاسخ می‌دهد:

— فناوری آموزشی چگونه بر آموزش ریاضی دانشجویان تأثیر می‌گذارد؟

— چه تغییراتی در آموزش ریاضیات در عصر دیجیتال رخ داده است؟

۲- اهمیت فناوری آموزشی در ارتقای فرآیندهای تدریس و یادگیری ریاضیات در آموزش عالی

ادغام فناوری آموزشی در آموزش عالی به‌عنوان یک نیروی دگرگون‌کننده ظهور کرده و چشم‌انداز آموزش و یادگیری را تغییر شکل می‌دهد. این مقدمه، با تکیه بر یافته‌های تحقیقاتی اخیر، اهمیت فناوری آموزشی را در ارتقای فرآیندهای آموزشی بررسی می‌کند. ظهور فناوری‌های دیجیتال فرصت‌های بی‌سابقه‌ای را برای غنی‌سازی تجربیات آموزشی، تسهیل یادگیری شخصی‌سازی‌شده و از بین بردن شکاف‌های مکانی و زمانی بین مدرسان و دانشجویان ارائه داده است.

همه‌گیری کووید-۱۹، پذیرش فناوری‌های نوظهور (ETs) را در آموزش تسریع کرده و پتانسیل آن‌ها را برای پشتیبانی از یادگیری مداوم در شرایط چالش‌برانگیز برجسته کرده است. فناوری‌هایی مانند واقعیت افزوده (AR)، واقعیت مجازی (VR) و یادگیری سیار به‌عنوان فناوری‌های مؤثر در بهینه‌سازی فرآیندهای آموزشی شناخته شده‌اند و تجربیات یادگیری فراگیری را ارائه می‌دهند که می‌تواند منجر به افزایش دانش و انگیزه دانشجویان شود [5]. این امر نه تنها بر اهمیت ادغام فناوری در محیط‌های آموزشی، بلکه بر اهمیت درک پذیرش و استفاده از آن در بین دانشجویان نیز تأکید می‌کند. با تأکید بیشتر بر تأثیر فناوری آموزشی، دانشجویانی که از ابزارهای مبتنی بر فناوری استفاده می‌کنند، سطوح بالاتری از یادگیری، نگرش بهبودیافته نسبت به

ششمین همایش ملی ریاضی و آمار

<https://conf.gonbad.ac.ir/msc1404>

یادگیری و افزایش تعامل و انگیزه را نشان می‌دهند. این یافته‌ها نشان می‌دهد که فناوری آموزشی می‌تواند عملکرد را در محیط‌های مختلف آموزشی، از جمله آموزش عالی، افزایش دهد. استفاده از فناوری آموزشی در مراکز آموزشی با بهبود نتایج یادگیری مرتبط بوده است و نقش فناوری را در تقویت استقلال یادگیری و افزایش تجربه آموزشی دانشجویان در زمینه‌های تخصصی تحصیلی برجسته می‌کند.

علاوه بر این، اهمیت فناوری‌های کمکی (AT) در حمایت از دانشجویان دارای معلولیت در آموزش عالی را نمی‌توان نادیده گرفت. چن و همکاران دریافتند که استفاده از فناوری کمکی نه تنها از مشارکت آموزشی پشتیبانی می‌کند، بلکه رفاه و خودکارآمدی تحصیلی را نیز افزایش می‌دهد و تأثیر مثبتی بر شایستگی، سازگاری و عزت نفس دارد. این تحقیق نقش حیاتی فناوری کمکی را در تضمین دسترسی عادلانه به آموزش و حمایت از نیازهای متنوع یادگیرندگان برجسته می‌کند [4].

چشم‌انداز فناوری‌های آموزشی گسترده و متنوع است و طیف وسیعی از ابزارها، پلتفرم‌ها و روش‌های طراحی شده برای ارتقای تجربیات تدریس و یادگیری را در برمی‌گیرد. در اینجا انواع مختلف فناوری‌های آموزشی، از جمله سیستم‌های مدیریت یادگیری (LMS)، پلتفرم‌های آنلاین و ابزارهای شبیه‌سازی و کاربردهای آن‌ها در آموزش عالی را بررسی می‌کند. LMS امکان ترکیب فزاینده‌ای از آموزش آنلاین و کلاس درس را فراهم می‌کند. اعضای هیئت‌علمی یک مدل «معکوس» ایجاد می‌کند که در آن ویدیوهایی از سخنرانی‌ها از قبل ارائه می‌شود و از کلاس برای پروژه‌های تعاملی استفاده می‌شود. بحث به‌صورت آنلاین و ادامه می‌یابد. LMS انعطاف‌پذیری لازم را برای دانشجویان فراهم می‌کند تا در هر زمانی به مطالب دسترسی داشته باشند و به جریان‌های داده جدید اجازه می‌دهد تا مشارکت را ارزیابی کنند. طرفداران این رویکرد معتقدند که یادگیری دیجیتال، دسترسی را گسترش می‌دهد، انعطاف‌پذیری در برنامه‌ریزی را فراهم می‌کند و تنوع را تشویق می‌کند. با این حال، میزان ماندگاری در دوره‌های آنلاین هنوز کمتر است. منتقدان معتقدند که یادگیری از راه دور، دانشجویان را منزوی می‌کند، نابرابری‌ها را تشدید می‌کند و آن‌ها را از اجتماعی شدن و توسعه مهارت محروم می‌کند [6].

پرز به اهمیت سیستم‌های مدیریت یادگیری (LMS) در دیجیتالی شدن فرآیند آموزش می‌پردازند. این مطالعه بر تغییر به سمت شخصی‌سازی و تجربه کاربری در آموزش تأکید دارد که با اجرای LMS در مؤسسات آموزشی مختلف تسهیل می‌شود. همه‌گیری کووید-۱۹ نیاز به سیستم‌های فناوری قوی برای پشتیبانی از آموزش الکترونیکی را بیشتر برجسته کرده و مزایای منابع دیجیتال مانند برنامه‌های نرم‌افزاری، دستگاه‌های تلفن همراه و اینترنت را در افزایش اثربخشی سیستم آموزشی برجسته کرده است [14].

مومن و همکاران پیاده‌سازی یک سیستم مدیریت یادگیری (LMS) آنلاین را تجزیه و تحلیل می‌کنند. این مطالعه، برداشت دانشجویان را در هشت پلتفرم LMS در سطح عالی، با تمرکز بر جنبه‌های آموزش و یادگیری، شایستگی مدرس و زیرساخت، مقایسه می‌کند. یافته‌ها نشان می‌دهد که پلتفرم‌هایی مانند زوم، گوگل کلاس روم و واتس‌آپ توسط دانشجویان برای آموزش از راه دور ترجیح داده می‌شوند، که نشان‌دهنده روندی به سمت محیط‌های یادگیری آنلاین در دسترس‌تر و کاربرپسندتر است [11]. بیگ و یادگیری کردکردی یک بررسی سیستماتیک از متون مربوط به کلاس درس معکوس در آموزش عالی انجام می‌دهند و بر نقش فناوری‌ها و ابزارها در این رویکرد آموزشی تمرکز می‌کنند. این مطالعه، فناوری‌های مختلفی را که از یادگیری معکوس پشتیبانی می‌کنند، از جمله ابزارهای ساخت ویدیو، LMS، مخازن محتوا، پلتفرم‌های مشارکتی، پادکست‌ها و ابزارهای ارزیابی آنلاین، شناسایی می‌کند. این تحقیق چالش‌ها و استراتژی‌های بالقوه برای بهبود اجرای کلاس‌های درس معکوس را برجسته می‌کند و به درک بهتر چگونگی تأثیر یادگیری معکوس بر بهبود آموزش عالی کمک می‌کند [2].

فناوری‌های آموزشی مانند LMS، پلتفرم‌های آنلاین و ابزارهای شبیه‌سازی نقش حیاتی در مدرن‌سازی آموزش عالی ایفا می‌کنند. این فناوری‌ها نه تنها یادگیری فعال و شخصی‌سازی را تسهیل می‌کنند، بلکه از رویکردهای نوآورانه آموزشی مانند کلاس‌های درس معکوس نیز پشتیبانی می‌کنند. هم‌زمان با اینکه مؤسسات آموزش عالی همچنان با چالش‌ها و فرصت‌های ناشی

ششمین همایش ملی ریاضی و آمار

<https://conf.gonbad.ac.ir/msc1404>

از تحول دیجیتال دست‌وپنجه نرم می‌کنند، ادغام استراتژیک فناوری‌های آموزشی کلید بهبود نتایج آموزش و یادگیری خواهد بود.

ارزیابی نتایج یادگیری نقش محوری در ارزیابی اثربخشی مداخلات آموزشی ایفا می‌کند و به‌عنوان یک معیار حیاتی برای مدرسان، سیاست‌گذاران و ذینفعان جهت درک تأثیر استراتژی‌ها و فناوری‌های آموزشی بر یادگیری و توسعه دانشجویان عمل می‌کند. این اهمیت با تأکید روزافزون بر شیوه‌های مبتنی بر شواهد در آموزش، که در آن تصمیمات مربوط به طراحی برنامه درسی، روش‌های تدریس و تخصیص منابع به‌طور فزاینده‌ای توسط داده‌های تجربی در مورد نتایج یادگیری اتخاذ می‌شوند، برجسته‌تر می‌شود [1].

مداخلات آموزشی، از محیط‌های کلاس درس سنتی گرفته تا محیط‌های یادگیری آنلاین نوآورانه، باهدف افزایش کارایی، اثربخشی و تعامل یادگیری انجام می‌شوند. ارزیابی این مداخلات از نظر نتایج یادگیری نه‌تنها بینش‌هایی در مورد تأثیر آن‌ها بر پیشرفت تحصیلی دانشجویان ارائه می‌دهد، بلکه فرآیندهای بهبود مستمر را برای شیوه‌های آموزشی نیز آگاه می‌کند. علاوه بر این، ارزیابی نتایج یادگیری فراتر از پیشرفت تحصیلی صرف است و ابعاد وسیع‌تری مانند تفکر انتقادی، همکاری و مهارت‌های یادگیری مادام‌العمر را در برمی‌گیرد که برای موفقیت دانش‌آموزان در قرن بیست و یکم ضروری هستند [16].

بهرایک بررسی تجربی از مداخلات فناوری در آموزش ارائه می‌دهد و تأثیرات آن‌ها را بر پیشرفت تحصیلی، انگیزه و مشارکت دانش‌آموزان بررسی می‌کند. این بررسی مشخص می‌کند که محیط‌های یادگیری مبتنی بر فناوری، از جمله دستگاه‌های تلفن همراه، پلتفرم‌های آنلاین و نرم‌افزارهای آموزشی، می‌توانند منجر به بهبود عملکرد تحصیلی و افزایش مشارکت شوند. به‌رأبر لزوم متناسب‌سازی فناوری‌های آموزشی با نیازهای فردی یادگیرنده تأکید می‌کند و اظهار می‌دارد که محیط‌های یادگیری شخصی‌سازی شده می‌توانند مزایای فناوری را در آموزش به حداکثر برسانند [3].

ادغام فناوری آموزشی تأثیر قابل‌توجهی بر نتایج یادگیری دارد و مطالعات نشان‌دهنده بهبود عملکرد تحصیلی، تعامل و انگیزه است. بااین‌حال، اثربخشی این فناوری‌ها به همسویی آن‌ها با اهداف آموزشی و نیازهای فردی دانشجویان بستگی دارد. با ادامه تکامل فناوری آموزشی، تحقیقات بیشتری برای بررسی پتانسیل آن در زمینه‌های یادگیری متنوع و برای دانشجویانی با پیشینه‌ها و توانایی‌های مختلف موردنیاز است.

مالک تأثیر آموزش مبتنی بر فناوری را بر نتایج یادگیری و مشارکت دانشجویان بررسی می‌کند. این مطالعه تأثیرات مثبت فناوری را بر پیشرفت تحصیلی، حفظ دانش و مهارت‌های تفکر انتقادی برجسته می‌کند. علاوه بر این، افزایش مشارکت و انگیزه دانشجویان و همچنین بهبود تعاملات مدرس و دانشجو را در نتیجه ادغام فناوری نشان می‌دهد. بااین‌حال، مالک به چالش‌هایی مانند نیاز به پشتیبانی فنی و پتانسیل ایجاد حواس‌پرتی توسط فناوری نیز اشاره می‌کند. این مطالعه بر اهمیت پیاده‌سازی استراتژیک فناوری برای افزایش نتایج یادگیری تأکید می‌کند [9].

چند سال گذشته شاهد رشد نمایی ابزارهای هوش مصنوعی مرتبط با آموزش بوده‌ایم.

لو و هی تأثیر هوش مصنوعی (AI) را بر نتایج یادگیری از طریق متاآنالیز ۲۷ مطالعه تجزیه‌وتحلیل می‌کنند. تحقیقات آن‌ها نتیجه می‌گیرد که فناوری هوشمند به‌طور قابل‌توجهی نتایج یادگیری را بهبود می‌بخشد، اگرچه میزان این بهبود بر اساس متغیرهای تعدیل‌کننده مختلف متفاوت است. این مطالعه توصیه‌های عملی برای استفاده از فناوری هوشمند در محیط‌های آموزشی ارائه می‌دهد و پتانسیل دگرگون‌کننده هوش مصنوعی را در افزایش تجربیات یادگیری برجسته می‌کند [8]. اگرچه هوش مصنوعی می‌تواند وظایف را خودکار کند، اما نمی‌تواند در جنبه‌های پیچیده‌تر آموزش عالی جایگزین مدرسان شود. محققان معتقدند که مدرسان در عصر هوش مصنوعی باید نقش مهمی در هدایت شخصیت دانشجویان به‌عنوان تحلیلگران داده و به‌عنوان تطبیق‌دهندگان، کاربران و رهبران هوش مصنوعی ایفا کنند [12]. با این‌حال، بعضی از دانشجویان برده هوش مصنوعی شده‌اند، دیگر اصلاً از مغزشان استفاده نمی‌کنند و تمام اطلاعات غلطی را که هوش مصنوعی به آن‌ها می‌دهد، می‌پذیرند [8]. مدرسان نیز



ششمین همایش ملی ریاضی و آمار

<https://conf.gonbad.ac.ir/msc1404>

باید آموزش‌های حرفه‌ای جامع و عمیق و آموزش مداوم، از جمله آموزش فناوری آموزشی هوش مصنوعی برای تسلط بر استفاده از ابزارهای مرتبط، دریافت کنند.

۳- نتیجه و جمع‌بندی

بررسی نقش فناوری آموزشی در افزایش نتایج یادگیری، چشم‌انداز پیچیده‌ای را آشکار کرده است که با دستاوردهای قابل توجه و چالش‌های مداوم مشخص شده است. ادغام فناوری در محیط‌های آموزشی با وعده تجربیات یادگیری شخصی‌تر، جذاب‌تر و در دسترس‌تر، هدایت شده است. این مطالعه، پتانسیل فناوری‌های مختلف، از جمله سیستم‌های مدیریت یادگیری، برنامه‌های کاربردی تلفن همراه، واقعیت مجازی و هوش مصنوعی را برای تغییر فرآیندهای تدریس و یادگیری روشن کرده است. این فناوری‌ها رویکردهای نوآورانه آموزشی، مانند یادگیری ترکیبی، کلاس‌های درس معکوس و یادگیری مبتنی بر پروژه را تسهیل کرده‌اند و بر تغییر به سمت آموزش دانشجو محورتر تأکید دارند. آینده فناوری آموزشی ریاضیات در آموزش عالی فقط مربوط به ابزاری نیست که ما استفاده می‌کنیم، بلکه نحوه استفاده از آن‌ها برای ایجاد یک محیط یادگیری فراگیرتر، جذاب‌تر و مؤثرتر برای همه دانشجویان است. بنابراین، اگر این امر با هدایت مدرسان به‌طور خردمندانه ادغام شود، می‌تواند امکانات جدیدی را برای دانشجویان فراهم کند تا از پتانسیل خود حداکثر استفاده را بنمایند.

۴- مراجع

- [1] Angrist, N., Evans, D.K., Filmer, D., Glennerster, R., Rogers, F.H. and Sabarwal, S.; How to Improve Education Outcomes Most Efficiently?: A Comparison of 150 Interventions Using the New Learning-adjusted Years of Schooling Metric. World Bank Group, Education Global Practice & Development Research Group, 2020.
- [2] Baig, M.I. and Yadegaridehkordi, E.; Flipped classroom in higher education: a systematic literature review and research challenges. *International Journal of Educational Technology in Higher Education*, 20(1), p.61, 2023.
- [3] Behera, D.K.; Technological Interventions in Education: An Empirical Review of Their Impact on Learning Outcomes. *ALSYSTECH Journal of Education Technology*, 1(1), pp.62-77, 2023.
- [4] Chen, B., Knight, S., Wise, A., & Cheng, J.; Critical issues in designing and implementing temporal analytics. *Journal of Computing in Higher Education*, 30(1), 27-47, 2018.
- [5] Criollo-C, S., González-Rodríguez, M., Guerrero-Arias, A., Urquiza-Aguilar, L.F. and Luján-Mora, S.; A Review of Emerging Technologies and Their Acceptance in Higher Education. *Education Sciences*, 14(1), p.10, 2023.
- [6] Graham, C. R., Woodfield, W., & Harrison, J. B.; A framework for institutional adoption and implementation of blended learning in higher education. *Internet and Higher Education*, 18, 4- 14, 2013.
- [7] Hiltz, S. R., & Turoff, M.; Education goes digital: The evolution of online learning and the revolution in higher education. *Communications of the ACM*, 48(10), 59-64, 2005.
- [8] Lu, H. and He, L.; Can Empowering Intelligent Technology Improve Learning Outcomes?. In 2023 5th International Conference on Computer Science and Technologies in Education (CSTE) (pp. 141-145), 2023.
- [9] Malik, R.; Impact of Technology-based Education on Student Learning Outcomes and Engagement. In 2023 10th International Conference on Computing for Sustainable Global Development (INDIACom) (pp. 784-788), 2023.
- [10] Maritsa, A., Hanifah Salsabila, U., Wafiq, M., Rahma Anindya, P., & Azhar Ma'shum, M; Pengaruh Teknologi Dalam Dunia Pendidikan. *Al-Mutharahah: Jurnal Penelitian Dan Kajian Sosial Keagamaan*, 18(2), 91-100, 2021.
- [11] Memon, M.Q., Lu, Y., Memon, A.R., Memon, A., Munshi, P. and Shah, S.F.A.; Does the impact of technology sustain students' satisfaction, academic and functional performance: an analysis via interactive and self-regulated learning?. *Sustainability*, 14(12), p.7226, 2022.



ششمین همایش ملی ریاضی و آمار

<https://conf.gonbad.ac.ir/msc1404>

- [12] Miao, Y., & Yao, Y.; Professional development of college teachers in the era of artificial intelligence:role rebuilding and development path. Application of Intelligent Systems in Multi-modal Information Analytics: Proceedings of the 2020 International Conference on Multi-model Information Analytics (MMIA2020), Volume 1, 2021.
- [13] Nilson, L. B., & Goodson, L. A.; Online Teaching at Its Best: Merging Instructional Design with Teaching and Learning Research. In Journal of Development Research (Vol. 13, Issue 4), 2021.
- [14] Perez, E., Manca, S., Fernández-Pascual, R., & Mc Guckin, C.; A systematic review of social media as a teaching and learning tool in higher education: A theoretical grounding perspective. Education and Information Technologies, 2023.
- [15] Radford, A., Wu, J., Child, R., Luan, D., Amodei, D., & Sutskever, I.; Language models are unsupervised multitask learners (OpenAI Technical Report), 2019.
- [16] Reynolds, S., Pate, W.C. and Ochoa, O.; An Ontology and Management System for Learning Outcomes and Student Mastery. In 2023 IEEE Frontiers in Education Conference (FIE) (pp. 1-5), 2023.
- [17] Roehl, A., Reddy, S. L., & Shannon, G. J.; The Flipped Classroom: An Opportunity To Engage Millennial Students Through Active Learning Strategies. Journal of Family & Consumer Sciences, 105(2), 44–49, 2013.
- [18] Selwyn, N.; Pendidikan dan Teknologi Isu dan Perdebatan Utama. In *Journal of Community Engagement and Employment* (Vol. 5, Issue 1), 2019.
- [19] Willis, J. E., Campbell, J. P., & Pistilli, M. D.; Ethics, Big Data, and Analytics: A Model for Application. EDUCAUSE Review Online, 1, 2013.



چگونگی رفتار تصادفات رانندگی با داده های Circular

محمد رضا سروری^۱، مهدی دوست پرست^۲^۱ دانشجوی دکتری تخصصی آمار، دانشگاه فردوسی مشهد، دانشکده علوم ریاضی؛ sarvari.mohammadreza@mail.um.ac.ir^۲ عضو هیات علمی گروه آمار، دانشگاه فردوسی مشهد، دانشکده علوم ریاضی؛ doustparast@um.ac.ir

چکیده

داده های جهت دار یا دایره ای در زمینه های کاربردی رخ می دهند. جهت های بادها، زمان های روزانه رویدادها و جهت های پرواز پرنده ها نمونه هایی از مشاهدات جهت دار هستند. این مقاله به مسئله فرضیه های آماری با استفاده از رویکردی شواهدی بر داده های دایره ای می پردازد. فرض بر این است که نمونه ای از توزیع نرمال دایره ای در دسترس است. فرضیه های مربوط به پارامتر میانگین جهت μ زمانی در نظر گرفته می شوند که پارامتر تمرکز ν معلوم و مجهول باشد. در ادامه به تحلیل مجموعه ای از داده های دایره ای واقعی درباره حوادث رانندگی در یکی از معابر شهری از دیدگاه استنباط شواهدی پرداخته می شود. بدین منظور، ابتدا نظریه استنباط شواهدی براساس داده های دایره ای بیان می شود. سپس اندازه های پشتیبانی بر اساس نسبت درستنمایی ارائه شده و شواهدی قوی، گمراه کننده و ضعیف محاسبه می گردد. چون روابط به دست آمده به پارامترهای مزاحم بستگی دارد، از برآوردگرهای ماکسیمم درستنمایی نیم رخ پارامترهای مزاحم استفاده می شود. در انتها نتایج نظری به دست آمده برای تحلیل داده های مذکور به کار برده می شود. این پژوهش برگرفته از مقاله سروری و دوست پرست (2025) است.

کلمات کلیدی: داده های دایره ای؛ آزمون فرضیه؛ رویکرد شواهدی؛ نسبت درستنمایی.

۱- مقدمه

اصطلاح آمار دایره ای به شاخه ای از علم آمار اشاره می کند که به داده هایی بر حسب زاویه که به صورت نقاطی روی محیط دایره واحد می توان نشان داد، می پردازد. چنین داده هایی را داده های دایره ای می نامند و اصطلاحی است که آن ها را از داده های خطی معمولی متمایز می کند. برخلاف داده های خطی، که روی خط حقیقی قرار می گیرند، داده های دایره ای بر روی دایره واحد نشان داده می شوند. برای جزئیات بیشتر به جامالاماداکا و سنگوپتا (۲۰۰۱) و ماردیا (۱۹۷۲) مراجعه شود. در سالهای اخیر در استنباط آماری، رویکرد جدیدی به نام استنباط شواهدی توسط پژوهشگران معرفی شده است. در این دیدگاه، این سوال پاسخ داده می شود که داده ها به چه میزان از فرضیه ها پشتیبانی می کنند. برای جزئیات بیشتر به رویال (۱۹۹۷)، رویال (۲۰۰۰) و کاهوساک (۲۰۲۰) مراجعه شود. در این مقاله، از دیدگاه شواهدی داده های مربوط به حوادث رانندگی در یکی از معابر شهری بررسی می شود.

۲- اصطلاح آمار دایره ای

اصطلاح داده های دایره ای به شاخه ای از علم آمار اشاره می کند که به داده هایی بر حسب زاویه که به صورت نقاطی روی محیط دایره واحد می توان نشان داد، می پردازد. برخلاف داده های خطی، که روی خط حقیقی قرار می گیرند، داده های دایره ای بر روی دایره واحد نشان داده می شوند. برای جزئیات بیشتر به جامالاماداکا و سنگوپتا (۲۰۰۱) و ماردیا (۱۹۷۲) مراجعه شود.

ششمین همایش ملی ریاضی و آمار

<https://conf.gonbad.ac.ir/msc1404>

۳- تفاوت رویکردهای آماری

با توجه به مشاهدات (داده ها)، چه تصمیمی بین هر دو عملی بگیریم و انجام دهیم؟ رویکرد کلاسیک با توجه به مشاهدات (داده ها) اعتقاد ما به درستی یک فرضیه در مقابل فرضیه دیگر چقدر است؟ رویکرد بیزی مشاهدات (داده ها) از کدام فرضیه بیشتر پشتیبانی می کنند و به چه میزان؟ رویکرد شواهدی

۱.۳- توزیع فون میزس

متغیر تصادفی Z دارای توزیع فون میزس یا توزیع نرمال دایره ای با پارامترهای μ و ν است و با نماد

$$Z \sim VM(\mu, \nu)$$

نشان داده می شود، اگر دارای تابع چگالی (۱) باشد، که در آن، $0 \leq \mu < 2\pi$ و $0 \leq \nu$ پارامترهای توزیع هستند و $I_0(\nu)$ ثابت نرمال ساز یا تابع بسل اصلاح شده نوع اول و مرتبه صفر است که با رابطه (۲) نشان داده شده است.

$$f(z; \mu, \nu) = \frac{1}{2\pi I_0(\nu)} e^{\nu \cos(z-\mu)}, \quad 0 \leq z \leq 2\pi \quad (1)$$

$$I_0(\nu) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp[\nu \cos(z)] dz. \quad (2)$$

برای جزئیات بیشتر به جامالامادا کا و سنگوپتا (۲۰۰۱) و ماردیا (۱۹۷۲) مراجعه شود.

۲.۳- اصطلاح آمار شواهدی

دانش امروز بر پایه تفسیر داده ها از علم آمار کمک می گیرد. انتظار می رود که آمار روشهای عینی برای ارائه داده های علمی به عنوان شواهد، و نیز راهی برای اندازه گیری قوت این شواهد، فراهم سازد. مهمترین وظیفه آمار این است که در مورد تفسیر شواهد حاصل از آزمایشها یا مطالعات مشاهده ای، جانشینی عینی و کمی برای قضاوت های شخصی فراهم کند. در قالب این نقش است که آمار اساسی ترین کمک را به علم کرده است. برای جزئیات بیشتر به رویال (۱۹۹۷) مراجعه شود.

فرض کنید، دو فرضیه H_1 و H_2 مورد نظر پژوهشگر است. برای اندازه گیری میزان پشتیبانی داده ها از فرضیه ها، از نسبت درستنمایی تحت H_1 به H_2 استفاده می شود. این عدد را با $LR_{2|1}$ نشان می دهند، اگر مقدار $LR_{2|1}$ کوچکتر از $\frac{1}{k}$ باشد، داده ها به طور قوی از فرضیه H_1 پشتیبانی می کنند ولی اگر مقدار $LR_{2|1}$ بزرگتر از k باشد داده ها به طور قوی از فرضیه H_2 پشتیبانی می کنند. سایر مقادیر $LR_{2|1}$ معنای پشتیبانی ضعیف از فرضیه ها است. در این حالت، برای تعیین تکلیف بایستی داده های بیشتر جمع آوری شود. برای دریافت اطلاعات بیشتر به عمادی و ارقامی (۲۰۰۳) مراجعه کنید.

تحت فرضیه H_1 ، مقدار $P(LR_{2|1} < \frac{1}{k})$ را اندازه شواهد قوی نامیده و با نماد $SEV_{1|1}$ نشان می دهند. تحت فرضیه H_1 ، مقدار $P(LR_{2|1} > k)$ را شواهد گمراه کننده نامیده و با نماد $MEV_{2|1}$ نشان می دهند. تحت فرضیه H_1 ، مقدار $P(\frac{1}{k} < LR_{2|1} < k)$ اندازه شواهد ضعیف نامیده و با نماد W_1 نمایش داده می شود. به طور مشابه، اندازه شواهد قوی، گمراه کننده و ضعیف تحت فرضیه H_2 تعریف می شود. عدد آستانه k بستگی به کاربرد دارد. ولی مقادیر 8، 16 و 32 را در پژوهش های آماری پیشنهاد داده اند. برای دریافت اطلاعات بیشتر به عمادی و ارقامی (۲۰۰۳) و رویال (۱۹۹۷) مراجعه کنید. بدین منظور روابط شواهد قوی و گمراه کننده و ضعیف را با روش CLT در زمانی که ν مجهول است، به صورت زیر بدست می آید که برای اطلاع از جزئیات محاسبات روابط (۳)، (۴) و (۵) به سروری و دوست پرست (۲۰۲۵) مراجعه کنید.

ششمین همایش ملی ریاضی و آمار

<https://conf.gonbad.ac.ir/msc1404>

$$SEV_{1|1} = P(LR_{2|1} < 1/k | H_1) \approx 1 - \Phi \left(\frac{\sqrt{n} \left(\frac{\ln(k)}{n} - h(\bar{R}_1, \bar{R}_2) \right)}{\sqrt{\Gamma(0, \mu_1 - \mu_2, \hat{\nu}_1)}} \right) \quad (3)$$

$$MEV_{2|1} = P(LR_{2|1} > k | H_1) \approx \Phi \left(\frac{\sqrt{n} \left(\frac{-\ln(k)}{n} - h(\bar{R}_1, \bar{R}_2) \right)}{\sqrt{\Gamma(0, \mu_1 - \mu_2, \hat{\nu}_1)}} \right) \quad (4)$$

$$W_1 = P(1/k < LR_{2|1} < k | H_1) \approx \Phi \left(\frac{\sqrt{n} \left(\frac{\ln(k)}{n} - h(\bar{R}_1, \bar{R}_2) \right)}{\sqrt{\Gamma(0, \mu_1 - \mu_2, \hat{\nu}_1)}} \right) - \Phi \left(\frac{\sqrt{n} \left(\frac{-\ln(k)}{n} - h(\bar{R}_1, \bar{R}_2) \right)}{\sqrt{\Gamma(0, \mu_1 - \mu_2, \hat{\nu}_1)}} \right) \quad (5)$$

۴- مثال کاربردی با داده های واقعی

در این قسمت به تحلیل زمان رخ دادن ۴۲ حادثه رانندگی خطرناک در چهار سال متوالی در یکی از معابر شهری که منجر به بیشتر از ۲ مجروح شده است، از دیدگاه شواهدی پرداخته می شود. پژوهشگر علاقمند به دانستن این موضوع است که تصادفات خطرناک به طور متوسط در نیمه شب یا در نیمه روز رخ می دهند. ابتدا آزمون نیکویی برازش الگوی نرمال دایره ای با آزمون واتسون در نرم افزار R بررسی شد که داده ها از توزیع فون میزس (نرمال دایره ای) پیروی می کنند. بنابراین با استفاده از استنباط شواهدی، پشتیبانی داده ها از فرضیه $H_1: \mu = \mu_1 (\mu_1 = 0)$ در مقابل فرضیه $H_2: \mu = \mu_2 (\mu_2 > \mu_1)$ را بررسی نموده و نتایج آن گزارش می شود. شایان ذکر است که با توجه به مجهول بودن پارامتر ν در توزیع فون میزس داده ها، تحت فرضیه های H_1 و H_2 به روش ماکسیمم درستنمایی نیمرخ برآورد می شوند که برابر با $\hat{\nu}_1 = 0.49403$ است. در جدول ۱ خلاصه سازی آماری زمان رخ دادن 42 حادثه رانندگی خطرناک چهار سال متوالی در یکی از معابر شهری که منجر به بیشتر از ۲ مجروح شده است.

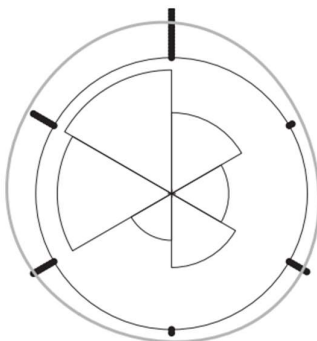
جدول ۱: مقایسه شاخص های پراکنندگی و تمرکز با رویکردهای دایره ای و خطی

متغیر دایره ای	میانگین دایره ای	میانگین خطی	واریانس دایره ای	واریانس خطی	انحراف معیار دایره ای	انحراف معیار خطی
برآورد روز سال حادثه (رادیان)	۲,۷۱۴۵	۲,۸۲۶	۰,۵۷۰	۱,۶۶۶	۱,۲۹۹	۱,۲۹۱
روز سال حادثه	۱۵۷,۶۹۱	۱۶۴,۱۹۰				
برآورد روز هفته حادثه (رادیان)	۱,۴۷۳	۳,۷۸۳	۰,۸۷۲	۳,۵۹۸	۲,۰۲۹	۱,۸۹۷
روز هفته حادثه	یکشنبه	چهارشنبه				
برآورد ساعت حادثه (رادیان)	-۰,۷۰۳	۳,۳۷۸	۰,۶۸۶	۴,۶۲۴	۱,۵۲۱	۲,۱۵۰
ساعت حادثه	۲۱:۱۸:۵۲	۱۲:۵۴:۰۷				

که نشان دهنده اختلاف بین روشهای دایره ای و خطی برای متغیرها و داده های دایره ای است. در ادامه نمودارهای مناسب داده های دایره ای با داده ها دایره ای جدول ۱ که به صورت شکل ۱ در نرم افزار R رسم شده است.

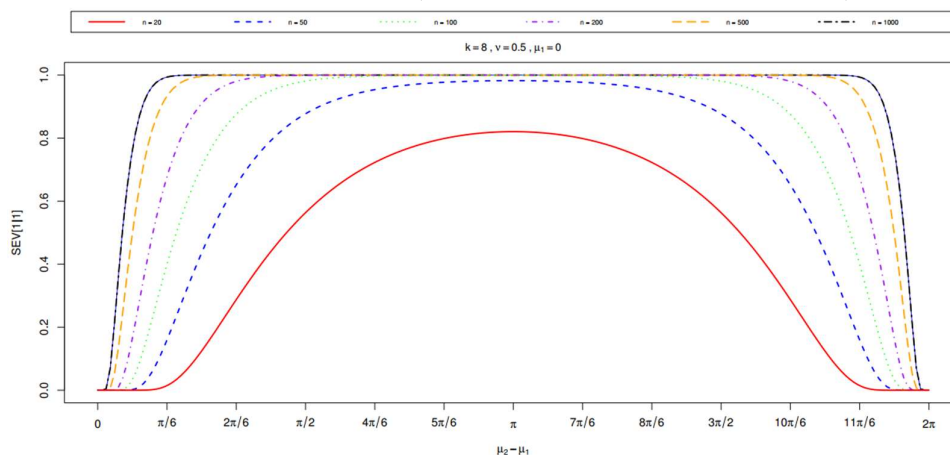
ششمین همایش ملی ریاضی و آمار

<https://conf.gonbad.ac.ir/msc1404>

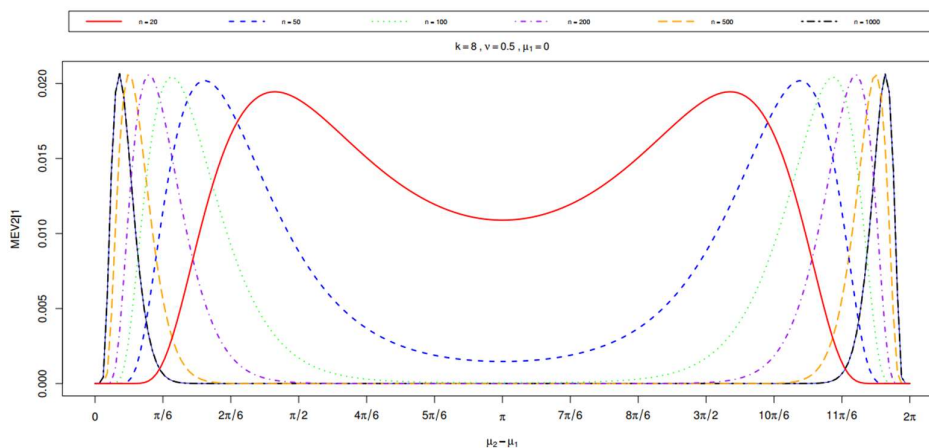


شکل ۱: نمودار میله ای دایره ای و نمودار رز و نمودار چگالی کرنل برای داده های جدول ۱

حال رفتار شواهد قوی و گمراه کننده با مقادیر ثابت $k = 8$ نسبت به مقادیر اختلاف میانگین های جهت در فرضیه های H_1 و H_2 و همچنین با حجم نمونه متفاوت به صورت شکل های ۲ و ۳ رسم شده است.



شکل ۲: نمودار مقادیر شواهد قوی نسبت به $\mu_2 - \mu_1$ برای مقادیر ثابت $k = 8$

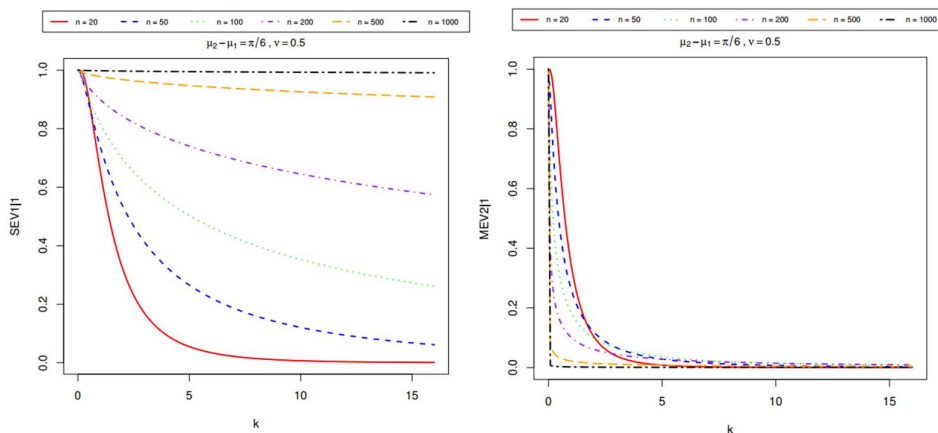


شکل ۳: نمودار مقادیر شواهد گمراه کننده نسبت به $\mu_2 - \mu_1$ برای مقادیر ثابت $k = 8$

ششمین همایش ملی ریاضی و آمار

<https://conf.gonbad.ac.ir/msc1404>

همچنین رفتار شواهد قوی و گمراه کننده با مقادیر ثابت $\mu_2 - \mu_1 = \frac{\pi}{6}$ نسبت به مقادیر متفاوت k و با حجم نمونه متفاوت به صورت شکل ۴ رسم شده است.



شکل 4: نمودار مقادیر شواهد قوی (چپ) و گمراه کننده (راست) نسبت به k برای مقادیر ثابت $\mu_2 - \mu_1 = \frac{\pi}{6}$

شایان ذکر است که پارامتر مزاحم v با روش MLE تحت فرضیه H_1 ($i = 1, 2$) تخمین زده می‌شود و با v_i نشان داده می‌شود. جدول ۲ برآورد ML پارامتر مزاحم v را تحت فرضیه جایگزین $H_2: \mu = \mu_2$ برای برخی از مقادیر انتخاب شده μ_2 نشان می‌دهد. لازم به ذکر است که برآورد ML پارامتر مزاحم v تحت $H_1: \mu = 0$ ، $v_1 = 0.49403$ است. بنابراین آماره نیم‌رخ LR برای فرضیه H_2 در برابر فرضیه H_1 ؛ یعنی $LR_{2|1}$ و مقدار پشتیبانی آن که با $S_{2|1} = \ln(LR_{2|1})$ تعریف شده و در جدول ۲ ارائه شده است. برای جزییات بیشتر به سروری و دوست‌پرست (۲۰۲۵) مراجعه کنید.

جدول ۲: مقایسه رویکرد کلاسیک یا P-value با رویکرد شواهدی

P-value	k = 32	k = 16	k = 8	k = 3	k = 2	$\widehat{S}_{2 1}$	$\widehat{LR}_{2 1}$	\hat{v}	μ_2
0.99999	weak	weak	H_1	H_1	H_1	-۲,۴۲۲۷۶	۰,۰۸۸۶۸	۰,۰۵۱۷۵	03:00 AM. (3π/12)
۱,۰۰۰۰۰	weak	weak	H_1	H_1	H_1	-۲,۴۵۰۸۷	۰,۰۸۶۲۲	۰,۰۰۰۰۰	06:00 AM. (6π/12)
۱,۰۰۰۰۰	weak	weak	H_1	H_1	H_1	-۲,۴۵۰۸۷	۰,۰۸۶۲۲	۰,۰۰۰۰۰	09:00 AM. (9π/12)
۱,۰۰۰۰۰	weak	weak	H_1	H_1	H_1	-۲,۴۵۰۸۷	۰,۰۸۶۲۲	۰,۰۰۰۰۰	12:00 PM. (12π/12)
۱,۰۰۰۰۰	weak	weak	H_1	H_1	H_1	-۲,۴۵۰۸۷	۰,۰۸۶۲۲	۰,۰۰۰۰۰	03:00 PM. (15π/12)
۱,۰۰۰۰۰	weak	weak	weak	weak	H_1	-۰,۶۹۸۱۹	۰,۴۹۷۴۸	۰,۴۱۵۱۰	06:00 PM. (18π/12)
۱,۰۰۰۰۰	weak	weak	weak	H_2	H_2	۱,۷۷۷۴۰	۵,۹۱۴۴۷	۰,۶۵۷۹۵	09:00 PM. (21π/12)

ششمین همایش ملی ریاضی و آمار

<https://conf.gonbad.ac.ir/msc1404>

فرضیه‌هایی که مجموعه داده‌ها از آنها پشتیبانی می‌کنند در جدول ۲ ارائه شده است و نشان می‌دهد که برای $k = 2$ و $k = 3$ داده‌ها فرضیه H_2 را پشتیبانی می‌کنند که ۹:۰۰ PM است. در واقع، برای $k = 32$ و $k = 16$ و $k = 8$ شواهد ضعیفی وجود دارد و ما به داده‌های بیشتری نیاز داریم. توجه داشته باشید که برآورد میانگین ساعت شبانه روز در جدول ۱ به صورت ۹:۱۸:۵۲ شب، بدست آمد.

علاوه بر این، به مقادیر p -value برای داده‌های دایره‌ای به دست آمده توسط سروری و دوست‌پرست (۲۰۲۵) و نیز در جدول ۲ ارائه شده‌اند که از نتایج به دست آمده نتیجه گرفته می‌شود که استفاده از مقادیر p -value منجر به تفسیرهای نادرست می‌شود. به عنوان مثال، در ساعت ۹:۰۰ PM، با مقادیر آستانه $k = 2$ و $k = 3$ ، شواهد آماری فرضیه H_2 را تأیید می‌کند ولی در عین حال، مقدار p -value فرضیه H_1 را رد نمی‌کند زیرا بزرگتر از مقادیر $\alpha = 0.05$ و $\alpha = 0.1$ است. این نشان می‌دهد که زمان ۲۴:۰۰ یا ۰۰:۰۰ بیشترین تعداد تصادفات منجر به آسیب به ۲ نفر یا بیشتر را دارد که با نتیجه به دست آمده از رویکرد مبتنی بر شواهد در تضاد است.

جدول ۳ معیارهای شواهد قوی، گمراه‌کننده و ضعیف که با روابط (۳) و (۴) و (۵) محاسبه شده‌اند را برای برخی از مقادیر انتخاب شده k و $\mu_2 = 21\pi/12$ نشان می‌دهد. همانطور که از جدول ۳ می‌توان مشاهده کرد که معیارهای شواهد قوی و گمراه‌کننده در k کاهش می‌یابند در حالی که معیار شواهد ضعیف در k افزایش می‌یابد. علاوه بر این، همانطور که انتظار داشتیم، با میل یافتن μ_2 به $\mu_1 = 0$ روی دایره واحد، شواهد ضعیف افزایش یافته و به سمت یک میل می‌کنند و تحت دو فرضیه $H_1: \mu = \mu_1 = 0$ و $H_2: \mu = \mu_2$ بر هم منطبق می‌شوند.

جدول ۳: مقادیر شواهد قوی و گمراه‌کننده و ضعیف در آزمون فرضیه $H_1: \mu_1 = 0$ در مقابل $H_2: \mu_2 = 21\pi/12$

W_2	$MEV_{1 2}$	$SEV_{2 2}$	W_1	$MEV_{2 1}$	$SEV_{1 1}$	k	μ_2
1.94979×10^{-6}	۰,۰۰۰۰	0.99999	۰,۰۰۰۰۶	۰,۹۹۹۹۴	۰,۰۰۰۰۰	۲	09:00 PM. ($21\pi/12$)
۰,۰۰۱۹۲	۰,۰۰۰۰	۰,۹۹۸۰۸	۰,۰۰۸۲۴	۰,۹۹۱۷۶	۰,۰۰۰۰۰	۳	
۰,۹۰۰۷۹	۰,۰۰۰۰	۰,۰۹۹۲۱	۰,۸۵۷۰۵	۰,۱۴۲۹۴	۰,۰۰۰۰۰	۸	
0.99999	۰,۰۰۰۰	۰,۰۰۰۰۱	۰,۹۹۹۷۸	۰,۰۰۰۲۲	۰,۰۰۰۰۰	۱۶	
0.99999	۰,۰۰۰۰	3.26866×10^{-13}	0.99999	1.22093×10^{-9}	۰,۰۰۰۰۰	۳۲	

۵- نتیجه و جمع‌بندی

مسئله‌ی آزمون فرضیه‌های پارامتر میانگین جهت با رویکرد شواهدی بررسی شد و معیارهای شواهد به تفصیل به دست آمدند. از آنجایی که این معیارها پیچیده بودند، تقریب‌های مختلفی بر اساس قانون اعداد بزرگ و CLT ارائه شد. این تقریب‌ها را می‌توان برای محاسبات سریع، زمانی که با مجموعه داده‌های بزرگ سروکار داریم، استفاده کرد. این رویکرد نیازی به تعیین



ششمین همایش ملی ریاضی و آمار

<https://conf.gonbad.ac.ir/msc1404>

تابع زیان مانند رویکرد کلاسیک ندارد. برخلاف رویکرد بیزی که نیاز به مشخص کردن یک تابع پیشین دارد، رویکرد شواهد عاری از یک تابع پیشین است. در واقع، رویکرد شواهد کاربردی مکمل روش‌های رویکردهای بیزی و کلاسیک است تا از دخالت و اعمال نظرات شخصی پژوهشگران جلوگیری شود.

۶- مراجع

- [1] P.M. Cahusac, *Evidence-Based Statistics: An Introduction to the Evidential Approach-from Likelihood Principle to Statistical Practice*, John Wiley & Sons, New York, 2020.
- [2] M. Emadi and N.R. Arghami, Some measure of support for statistical hypotheses, *J. Stat. Theory Appl.* 2 (2003), pp. 165–176.
- [3] S.R. Jammalamadaka and A. Sengupta, *Topics in Circular Statistics, Vol. 5*, World Scientific, London, 2001.
- [4] K.V. Mardia, *Statistics of Directional Data*, Academic Press, New York, 1972.
- [5] R.M. Royall, *Statistical Evidence: A Likelihood Paradigm*, Chapman & Hall, London, 1997.
- [6] R.M. Royall, On the probability of observing misleading statistical evidence, *J. Am. Stat. Assoc.* 95 (2000), pp. 760–768.
- [7] M.R. Sarvari, and M. Doostparast. "Evidence in directional data coming from circular normal distribution. *Journal of Applied Statistics* (2025), pp. 1-27

ششمین همایش ملی ریاضی و آمار

<https://conf.gonbad.ac.ir/msc1404>

F-360، صص ۳۷-۴۱.

مروری بر نقش نرم افزار MATLAB در آموزش مفاهیم ریاضی و تجسم نمودارها (با تأکید بر آموزش مدرسه‌ای)

میترا کشاورزی^۱، دکتر طاهره پورصادق فرد^۲

^۱ دانشجوی کارشناسی، گروه ریاضی و آمار، واحد فیروزآباد، دانشگاه آزاد اسلامی، فیروزآباد، ایران: Mitra.keshavarzi@iau.ir
^۲ استادیار، گروه ریاضی و آمار، واحد فیروزآباد، دانشگاه آزاد اسلامی، فیروزآباد، ایران: Ta.poursadeghfard@iau.ac.ir

چکیده

ریاضیات یکی از دروس بنیادین نظام آموزشی است که نقش مهمی در پرورش تفکر منطقی و توانایی حل مسئله دانش‌آموزان ایفا می‌کند. با این حال، ماهیت انتزاعی بسیاری از مفاهیم ریاضی همواره یادگیری این درس را با چالش‌هایی نظیر ضعف درک مفهومی و کاهش انگیزه یادگیرندگان همراه کرده است. در سال‌های اخیر، استفاده از فناوری‌های آموزشی به‌عنوان رویکردی مؤثر برای بهبود کیفیت آموزش ریاضی مورد توجه قرار گرفته است. در این میان، نرم‌افزار MATLAB به دلیل قابلیت‌های محاسباتی و گرافیکی خود، امکان تجسم بصری و پویای مفاهیم ریاضی را فراهم می‌سازد. هدف مقاله حاضر، مرور پژوهش‌های انجام‌شده در زمینه کاربرد نرم‌افزار MATLAB در آموزش مفاهیم ریاضی و تجسم نمودارها با تأکید بر آموزش مدرسه‌ای است. روش پژوهش از نوع مروری توصیفی بوده و منابع علمی معتبر داخلی و خارجی به‌صورت کیفی بررسی شده‌اند. نتایج این مطالعه نشان می‌دهد که استفاده هدفمند و متناسب از MATLAB می‌تواند موجب بهبود درک مفهومی، تقویت تجسم نمودارها، افزایش یادگیری فعال و ارتقای انگیزه دانش‌آموزان شود. در پایان، پیشنهادهایی برای به‌کارگیری مؤثر این نرم‌افزار در کلاس‌های حضوری و مجازی مدارس ارائه شده است.

کلمات کلیدی: آموزش ریاضی، تجسم نمودارها، فناوری آموزشی، آموزش مدرسه‌ای.

۱- مقدمه

ریاضیات به‌عنوان یکی از ارکان اساسی نظام آموزشی، نقش تعیین‌کننده‌ای در رشد توانایی‌های شناختی، پرورش تفکر منطقی و تقویت مهارت حل مسئله دانش‌آموزان دارد. با وجود این اهمیت، آموزش ریاضی به دلیل ماهیت انتزاعی بسیاری از مفاهیم، همواره با چالش‌هایی نظیر ضعف درک مفهومی، اضطراب ریاضی و نگرش منفی یادگیرندگان مواجه بوده است. روش‌های سنتی تدریس که عمدتاً بر انتقال یک‌سویه محتوا و حل تمرین‌های تکراری تأکید دارند، در بسیاری از موارد نتوانسته‌اند پاسخگوی نیازهای متنوع دانش‌آموزان باشند (Ruthven, Hennessy, & Brindley, 2004). پژوهش‌های متعددی نشان داده‌اند که استفاده از فناوری‌های آموزشی می‌تواند به بهبود کیفیت آموزش ریاضی و افزایش مشارکت فعال دانش‌آموزان منجر شود. McCoy (۱۹۹۶) بیان می‌کند که محیط‌های یادگیری مبتنی بر رایانه، امکان تعامل بیشتر دانش‌آموز با مفاهیم ریاضی را فراهم می‌کنند. همچنین، نتایج فراتحلیل Li و Ma (۲۰۱۰) نشان داد که استفاده از فناوری رایانه‌ای تأثیر مثبت معناداری بر یادگیری ریاضی دانش‌آموزان دارد. یافته‌های مشابهی نیز در مطالعات مروری و متاآنالیزهای دیگر گزارش شده است (Hillmayr et al., 2020; Schindler et al., 2017).

علاوه بر این، پژوهش‌های اخیر بر نقش فناوری در آموزش ریاضی در محیط‌های مجازی و ترکیبی تأکید دارند. Eidi (۲۰۲۰) نشان داد که استفاده از محیط‌های چندرسانه‌ای و مجازی می‌تواند یادگیری ریاضی را در شرایط آموزش از راه دور تسهیل کند. Weigand, Tregalová و Tabach (۲۰۲۴) نیز معتقدند که آموزش ریاضی در عصر دیجیتال نیازمند بهره‌گیری از ابزارهای

ششمین همایش ملی ریاضی و آمار

<https://conf.gonbad.ac.ir/msc1404>

فناورانه متناسب با اهداف آموزشی است. مجموع این یافته‌ها بیانگر آن است که بررسی دقیق‌تر نقش نرم‌افزارهای محاسباتی و گرافیکی، از جمله MATLAB، در آموزش ریاضی مدرسه‌ای ضروری به نظر می‌رسد. با وجود آنکه نرم‌افزار MATLAB عمدتاً به‌عنوان ابزاری تخصصی در آموزش‌های دانشگاهی شناخته می‌شود، نتایج برخی پژوهش‌ها نشان می‌دهد که استفاده ساده‌سازی شده، هدفمند و متناسب با سطح یادگیرندگان از این نرم‌افزار می‌تواند در آموزش مفاهیم ریاضی در سطوح پایین‌تر نیز اثربخش باشد. Dikovic (۲۰۰۹) در پژوهش خود نشان داد که به‌کارگیری MATLAB به‌عنوان ابزار تجسم گرافیکی، موجب بهبود درک مفهومی دانش‌آموزان از مفاهیم ریاضی و تقویت ارتباط میان نمایش‌های جبری و نموداری می‌شود. همچنین McCoy (۱۹۹۶) تأکید می‌کند که استفاده از محیط‌های محاسباتی رایانه‌محور، در صورتی که با اهداف آموزشی هم‌راستا باشد، می‌تواند یادگیری فعال و معنادار را در درس ریاضی تقویت کند.

از سوی دیگر، Norouzi، Zandi و Mousa Madani (۲۰۰۸) نیز بر این نکته تأکید دارند که اثربخشی فناوری آموزشی وابسته به نحوه به‌کارگیری آن در فرآیند تدریس است و استفاده افراطی یا بدون طراحی آموزشی مناسب می‌تواند کارایی آن را کاهش دهد. بنابراین، آنچه در استفاده از MATLAB در آموزش ریاضی مدرسه‌ای اهمیت دارد، نه پیچیدگی نرم‌افزار، بلکه طراحی فعالیت‌های آموزشی ساده، مرحله‌ای و متناسب با توانایی شناختی دانش‌آموزان است. مجموع این شواهد پژوهشی نشان می‌دهد که نرم‌افزار MATLAB، در صورت استفاده هدفمند و ساده‌سازی شده، می‌تواند به‌عنوان ابزاری مؤثر در تقویت تجسم نمودارها، افزایش درک مفهومی و ارتقای یادگیری فعال در آموزش ریاضی مدرسه‌ای مورد توجه قرار گیرد. بر این اساس، ضرورت انجام یک مطالعه مروری برای جمع‌بندی پژوهش‌های انجام‌شده در این حوزه بیش از پیش احساس می‌شود؛ هدفی که مقاله حاضر در پی تحقق آن است.

۲- روش پژوهش

پژوهش حاضر از نوع مطالعه مروری توصیفی است. در این نوع پژوهش، بدون انجام مطالعه تجربی جدید، پژوهش‌های پیشین مرتبط با موضوع بررسی، توصیف می‌شوند تا تصویری جامع از وضعیت موجود ارائه گردد. برای گردآوری منابع، پایگاه‌های علمی معتبر داخلی و خارجی از جمله Google Scholar، ScienceDirect، ERIC، SID و Magiran مورد جستجو قرار گرفتند. کلیدواژه‌هایی نظیر «MATLAB در آموزش ریاضی»، «تجسم نمودارها» و «فناوری آموزشی» به کار گرفته شد. منابع انتخاب‌شده بر اساس میزان ارتباط با موضوع، اعتبار علمی و تمرکز بر آموزش ریاضی مورد بررسی کیفی قرار گرفتند و نتایج آن‌ها در قالب محورهای مشترک می‌شوند.

۳- معرفی نرم‌افزار MATLAB و قابلیت‌های آموزشی آن

از جمله قابلیت‌های آموزشی MATLAB می‌توان به نمایش هم‌زمان روابط جبری و نمودارها، تغییر پارامترها و مشاهده تأثیر آن‌ها به صورت پویا اشاره کرد. علاوه بر این، نسخه‌های آنلاین MATLAB امکان استفاده از این نرم‌افزار را در کلاس‌های مجازی و آموزش از راه دور نیز فراهم کرده‌اند.

۴- کاربرد MATLAB در آموزش مفاهیم ریاضی مدرسه‌ای

استفاده از نرم‌افزار MATLAB در آموزش ریاضی مدرسه‌ای می‌تواند نقش مؤثری در تسهیل یادگیری مفاهیم انتزاعی ایفا کند. نمایش پویای نمودارها و امکان تغییر پارامترها، به دانش‌آموزان کمک می‌کند تا رفتار توابع و روابط ریاضی را به صورت عینی مشاهده کنند. این امر به‌ویژه در آموزش مباحثی مانند توابع، توابع نمایی و لگاریتمی، موجب تقویت درک مفهومی و کاهش یادگیری سطحی می‌شود.



ششمین همایش ملی ریاضی و آمار

<https://conf.gonbad.ac.ir/msc1404>

۵- تناسب MATLAB با روش‌های تدریس ریاضی

بررسی روش‌های تدریس ریاضی نشان می‌دهد که نرم‌افزار MATLAB بیشترین تناسب را با روش‌های یادگیری اکتشافی، یادگیری فعال و تدریس معکوس دارد و در مقابل، روش سخنرانی به دلیل ماهیت یک‌سویه خود، کمترین سازگاری را با قابلیت‌های تعاملی MATLAB دارد.

۵.۱- روش تدریس معکوس و نقش MATLAB

روش تدریس معکوس (Flipped Classroom) رویکردی نوین در آموزش است که در آن آموزش اولیه مفاهیم توسط دانش‌آموز و خارج از کلاس درس انجام می‌شود و زمان کلاس به فعالیت‌های تعاملی، حل مسئله و تعمیق یادگیری اختصاص می‌یابد. در این روش، نقش معلم از انتقال‌دهنده محتوا به هدایت‌گر فرآیند یادگیری تغییر می‌کند و دانش‌آموزان به صورت فعال در ساخت دانش مشارکت می‌نمایند. (Bergmann & Sams, 2012) نرم‌افزار MATLAB در روش تدریس معکوس مزیت‌های قابل توجهی ایجاد می‌کند. این نرم‌افزار امکان می‌دهد دانش‌آموزان پیش از کلاس با مشاهده نمودارها، تغییر پارامترها و بررسی مثال‌های ساده، درک اولیه‌ای از مفاهیم ریاضی به دست آورند. در زمان کلاس نیز MATLAB بستری مناسب برای تحلیل عمیق‌تر مفاهیم و رفع اشکالات فراهم می‌سازد. بدین ترتیب، MATLAB موجب افزایش اثربخشی زمان کلاس و تقویت یادگیری مفهومی در چارچوب روش تدریس معکوس می‌شود (Pierce & Stacey, 2010).

۵.۲- روش داربست‌سازی و نقش MATLAB

روش داربست‌سازی (Scaffolding) مبتنی بر ارائه حمایت‌های آموزشی تدریجی توسط معلم است؛ به گونه‌ای که این حمایت‌ها به مرور کاهش یافته و دانش‌آموز به یادگیری مستقل دست می‌یابد. این روش ریشه در نظریه رشد شناختی ویگوتسکی دارد و برای آموزش مفاهیم دشوار و انتزاعی بسیار مؤثر است. (Vygotsky, 1978) در چارچوب این روش، نرم‌افزار MATLAB نقش یک ابزار حمایتی مؤثر را ایفا می‌کند. معلم می‌تواند در مراحل اولیه، نحوه ترسیم نمودارها و تحلیل روابط ریاضی را با MATLAB به صورت گام‌به‌گام نمایش دهد و سپس دانش‌آموزان به تدریج فعالیت‌ها را به صورت مستقل انجام دهند. این رویکرد موجب کاهش بار شناختی و افزایش خودکارآمدی دانش‌آموزان در یادگیری مفاهیم ریاضی می‌شود (Hegedus & Moreno-Armella, 2009).

۵.۳- روش یادگیری اکتشافی و نقش MATLAB

روش یادگیری اکتشافی بر کشف مفاهیم توسط دانش‌آموز از طریق مشاهده، آزمون و خطا و بررسی نتایج استوار است. در این روش، یادگیرندگان با مشارکت فعال در فرآیند یادگیری، مفاهیم را به صورت عمیق‌تری درک می‌کنند. (Bruner, 1961) نرم‌افزار MATLAB بستری مناسب برای تحقق یادگیری اکتشافی فراهم می‌سازد. امکان تغییر پارامترها و مشاهده فوری نتایج، دانش‌آموزان را به کشف روابط ریاضی ترغیب می‌کند. این ویژگی موجب افزایش تفکر تحلیلی و تعمیق یادگیری مفهومی می‌شود (Hegedus & Moreno-Armella, 2009).

۵.۴- روش یادگیری فعال و نقش MATLAB

یادگیری فعال رویکردی است که در آن دانش‌آموزان نقش فعالی در فرآیند یادگیری دارند و از طریق فعالیت، تعامل و تحلیل به ساخت دانش می‌پردازند. پژوهش‌ها نشان داده‌اند که این روش نسبت به روش‌های سنتی اثربخشی بیشتری در یادگیری عمیق



ششمین همایش ملی ریاضی و آمار

<https://conf.gonbad.ac.ir/msc1404>

دارد. (Prince, 2004) نرم افزار MATLAB با ماهیت تعاملی خود، بستر مناسبی برای اجرای یادگیری فعال فراهم می کند. دانش آموزان می توانند با انجام فعالیت های عملی، ترسیم نمودارها و تحلیل نتایج، به صورت فعال در یادگیری مشارکت کنند. این تعامل مستقیم با مفاهیم ریاضی موجب افزایش درگیری شناختی و ارتقای یادگیری معنادار می شود (Pierce & Stacey, 2010).

۶- مزایا و معایب استفاده از MATLAB در آموزش ریاضی

از مهم ترین مزایای استفاده از MATLAB در آموزش ریاضی می توان به تقویت تجسم بصری مفاهیم، افزایش یادگیری فعال و ارتقای انگیزه دانش آموزان اشاره کرد. در مقابل، پیچیدگی نسبی نرم افزار، نیاز به آموزش معلمان و برخی محدودیت های فنی از جمله چالش های استفاده از آن در مدارس محسوب می شوند. از این رو، MATLAB باید به عنوان ابزاری مکمل در کنار روش های سنتی تدریس به کار گرفته شود.

۷- مدیریت زمان استفاده از MATLAB در کلاس

یافته های پژوهشی نشان می دهد که اثربخشی استفاده از MATLAB به مدیریت زمان مناسب در کلاس درس وابسته است. پیشنهاد می شود در کلاس های حضوری، سهم محدودی از زمان (حدود ۲۰ درصد) به فعالیت های مبتنی بر MATLAB اختصاص یابد و در کلاس های مجازی، فعالیت های کوتاه و هدفمند طراحی شود تا از خستگی شناختی دانش آموزان جلوگیری گردد.

۸- جمع بندی

نتایج این مطالعه مروری نشان می دهد که نرم افزار MATLAB، در صورت استفاده هدفمند و متناسب با مقطع تحصیلی و روش تدریس، می تواند نقش مؤثری در بهبود آموزش مفاهیم ریاضی مدرسه ای ایفا کند. بهره گیری از این نرم افزار در چارچوب روش های فعال و اکتشافی، زمینه درک عمیق تر مفاهیم ریاضی و افزایش مشارکت یادگیرندگان را فراهم می سازد.

۹- پیشنهادها

• برگزاری دوره های آموزشی برای معلمان در زمینه کاربرد آموزشی MATLAB
• طراحی فعالیت های ساده و متناسب با سطح دانش آموزان
• نویسنده قصد دارد در ادامه این پژوهش، یک مطالعه میدانی در یکی از مدارس غیردولتی متوسطه، یعنی مدرسه غیردولتی پسرانه سروش واقع در شهر بوشهر انجام دهد. در این مطالعه، استفاده از نرم افزار MATLAB به عنوان یک ابزار آموزشی مکمل در تدریس برخی مباحث ریاضی (از جمله توابع و نمودارها) مورد بررسی قرار خواهد گرفت. جامعه آماری پژوهش، دانش آموزان این مدرسه خواهند بود و مقایسه نتایج یادگیری آن ها با روش های متداول تدریس، امکان تحلیل دقیق تر تأثیر این نرم افزار را فراهم خواهد کرد.

۱۰- مراجع

- [1] Bergmann, J., & Sams, A. (2012). *Flip your classroom: Reach every student in every class every day*. International Society for Technology in Education.
[2] Bruner, J. S. (1961). The act of discovery. *Harvard Educational Review*, 31(1), 21-32.



ششمین همایش ملی ریاضی و آمار

<https://conf.gonbad.ac.ir/msc1404>

- [3] Eidi, H. (2020). Encouraging students to learn mathematics through virtual and multimedia environments. In *Proceedings of the National Conference on New Approaches in Education*.
- [4] Hegedus, S., & Moreno-Armella, L. (2009). Intersecting representation and technology in mathematics education. *ZDM – Mathematics Education*, 41(4), 399–412. <https://doi.org/10.1007/s11858-009-0180-1>
- [5] Hillmayr, D., Ziernwald, L., Reinhold, F., Hofer, S. I., & Reiss, K. M. (2020). The potential of digital tools to enhance mathematics learning in secondary education: A meta-analysis. *Educational Studies in Mathematics*, 103(3), 1–25. <https://doi.org/10.1007/s10649-019-09965-3>
- [6] Li, Q., & Ma, X. (2010). A meta-analysis of the effects of computer technology on school students' mathematics learning. *Educational Psychology Review*, 22(3), 215–243. <https://doi.org/10.1007/s10648-010-9125-8>
- [7] Pierce, R., & Stacey, K. (2010). Mapping pedagogical opportunities provided by mathematics analysis software. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 15(1), 1–20. <https://doi.org/10.1007/s10758-010-9162-1>
- [8] Prince, M. (2004). Does active learning work? A review of the research. *Journal of Engineering Education*, 93(3), 223–231. <https://doi.org/10.1002/j.2168-9830.2004.tb00809.x>
- [9] Ruthven, K., Hennessy, S., & Brindley, S. (2004). Teacher representations of the successful use of computer-based tools in secondary mathematics education. *Computers & Education*, 43(3), 259–275. <https://doi.org/10.1016/j.compedu.2003.12.004>
- [10] Safarian, S., Fallah, V., & Mirhosseini, S. H. (2010). A comparison of the effects of educational software and traditional teaching methods on learning mathematics. *ICT in Educational Sciences*, 1(2), 1–18.
- [11] Saal, P. E., Graham, M. A., & van Ryneveld, L. (2020). The relationship between integrating educational technology in mathematics education and students' mathematics achievement. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 16(7), Article em1863. <https://doi.org/10.29333/ejmste/7895>
- [12] Schindler, L. A., et al. (2017). Computers in education: A meta-review of technology-enhanced learning in mathematics. *Computers & Education*, 113, 1–15. <https://doi.org/10.1016/j.compedu.2017.05.003>
- [13] Verbruggen, S., Depaepe, F., & Torbeyns, J. (2021). Effectiveness of educational technology in early mathematics education: A systematic literature review. *International Journal of Child-Computer Interaction*, 27, 100220. <https://doi.org/10.1016/j.ijcci.2020.100220>
- [14] Vygotsky, L. S. (1978). *Mind in society: The development of higher psychological processes*. Harvard University Press.
- [15] Weigand, H.-G., Trgalová, J., & Tabach, M. (2024). Mathematics teaching, learning, and assessment in the digital age. *ZDM – Mathematics Education*, 56, 1–15. <https://doi.org/10.1007/s11858-024-01612-9>

ششمین همایش ملی ریاضی و آمار

<https://conf.gonbad.ac.ir/msc1404>

F-384, صص ۴۲-۴۵.

بررسی خواص هندسی برد عددی درجه دوم دسته‌های خطی ماتریس‌های بلوکی همراه با الگوریتم

مریم فضل الهی علمداری

استادیار گروه علوم پایه، دانشگاه ملی مهارت، تهران، ایران؛ m.fazlollahi.a@gmail.com

چکیده

دسته‌های خطی $A\lambda + B$ که A و B ماتریس‌های مختلط $n \times n$ و λ متغیر مختلط باشند را در نظر بگیرید. در این مقاله خواص هندسی برد عددی درجه دوم دسته خطی $A\lambda + B$ را بررسی نموده و با رسم نمودار، روابط مربوطه را بررسی می‌نمایند.

کلمات کلیدی: ماتریس‌های بلوکی؛ برد عددی درجه دوم؛ دسته خطی.

۱- مقدمه

فرض کنید $A\lambda + B$ دسته خطی باشد که A و B ماتریس‌های مختلط $n \times n$ و λ متغیر مختلط هستند. در صورتی که $A = I$ باشد، $A\lambda + B$ تکین و اگر ماتریس‌های A و B هرمیتی باشند، $A\lambda + B$ خودالحاق نامیده می‌شود. برای مطالعه در مورد دسته خطی به [1,3,2,6] مراجعه شود. مجموعه مقادیر ویژه دسته خطی $A\lambda + B$ طیف $A\lambda + B$ نام دارد.

$$\sigma(A\lambda + B) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \det(A\lambda + B) = 0\}$$

برای تعمیم مفهوم برد عددی درجه دوم برای ماتریس‌های دسته خطی، افراز زیر را در نظر می‌گیریم:

$$A := \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{bmatrix}, \quad B := \begin{bmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{bmatrix} \quad (1)$$

که $A_1, B_1 \in \mathbb{C}^{n_1}$ و $A_4, B_4 \in \mathbb{C}^{n_2}$ و $n_1 + n_2 = n$. فرض کنید:

$$\Sigma = \left\{ \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} : f \in \mathbb{C}^{n_1}, g \in \mathbb{C}^{n_2}, \|f\|_2 = \|g\|_2 = 1 \right\}. \quad (2)$$

برای هر $\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \in \Sigma$ فرض کنید:

$$A^{fg} := \begin{bmatrix} f^* A_1 f & f^* A_2 g \\ g^* A_3 f & g^* A_4 g \end{bmatrix}, \quad B^{fg} := \begin{bmatrix} f^* B_1 f & f^* B_2 g \\ g^* B_3 f & g^* B_4 g \end{bmatrix} \quad (3)$$

تعریف ۱: برد عددی درجه دوم دسته خطی $A\lambda + B$ برای A, B و λ فوق به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$W^2(A\lambda + B) = \bigcup_{\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \in \Sigma} \sigma(A^{fg}\lambda + B^{fg}) \quad (4)$$

ششمین همایش ملی ریاضی و آمار

<https://conf.gonbad.ac.ir/msc1404>

تعریف فوق، تعمیمی از برد عددی درجه دوم ماتریس‌های بلوکی 2×2 می‌باشد.

۲- نتایج اصلی

لم ۱: [4,5] داریم: $\sigma(A\lambda + B) \subset W^2(A\lambda + B) \subset W(A\lambda + B)$.

در ادامه خواص بنیادی برد عددی درجه دوم را ثابت می‌کنیم.

قضیه ۱: اگر $0 \in W^2(A)$ آنگاه $W^2(A\lambda + B)$ زیرمجموعه بسته‌ای از \mathbb{C} است.

اثبات: فرض کنید $\lambda_k \in W^2(A\lambda + B)$ و $\lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_k = \lambda_*$. لذا $\begin{pmatrix} f_k \\ g_k \end{pmatrix} \in \Sigma$ وجود دارد به طوری که

$\left\{ \begin{pmatrix} f_k \\ g_k \end{pmatrix} \right\}$ زیر دنباله‌ای همگرا دارد. بدون کاستن از حالت کلی

فرض کنیم $\left\{ \begin{pmatrix} f_k \\ g_k \end{pmatrix} \right\}$ همگراست و $\lim_{k \rightarrow \infty} \begin{pmatrix} f_k \\ g_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_* \\ g_* \end{pmatrix}$ لذا $\begin{pmatrix} f_* \\ g_* \end{pmatrix} \in \Sigma$ چون $0 \in W^2(A)$ و هر بردار ویژه $A^{fg}\lambda + B^{fg}$ تابع

پیوسته‌ای است، داریم: $\lambda_* \in \sigma(A^{f_*g_*}\lambda + B^{f_*g_*})$.

قضیه ۲: اگر ماتریس‌های A و B هرمیتی باشند آنگاه $W^2(A\lambda + B)$ نسبت به محور حقیقی متقارن است.

اثبات: چون A و B هرمیتی هستند برای هر $\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \in \Sigma$ ماتریس‌های A^{fg} و B^{fg} هرمیتی می‌باشند. بنابراین، $A^{fg}\lambda + B^{fg}$

چند جمله‌ای ماتریسی هرمیتی است. بنا به [5] نتیجه به دست می‌آید.

قضیه ۳: اگر $n_1, n_2 > 2$ آنگاه $W(A_1\lambda + B_1) \subset W^2(A\lambda + B)$ و $W(A_4\lambda + B_4) \subset W^2(A\lambda + B)$.

اثبات: برای هر بردار یکه $f \in \mathbb{C}^{n_1}$ توجه کنید که $\text{rank}([C_0f, C_1f]) \leq n + 1$ و $n_2 > 2$. لذا بردار یکه $g \in \mathbb{C}^{n_2}$ وجود

دارد به طوری که $g^*C_0f = 0$ و $g^*C_1f = 0$ در نتیجه

$$A^{fg} := \begin{bmatrix} f^*A_1f & f^*A_2g \\ 0 & g^*A_4g \end{bmatrix}, \quad B^{fg} := \begin{bmatrix} f^*B_1f & f^*B_2g \\ 0 & g^*B_4g \end{bmatrix}$$

که به دست می‌آید:

$$\sigma((f^*A_1f)\lambda + (f^*B_1f)) \subset \sigma(A^{fg}\lambda + B^{fg}) \subset W^2(A\lambda + B)$$

یعنی $W(A_1\lambda + B_1) \subset W^2(A\lambda + B)$. مورد دوم به طور مشابه نتیجه می‌شود.

نتیجه ۱: اگر $n_1, n_2 > 1$ و $0 \in W^2(A)$ آنگاه $0 \in W(A_1) \cup W(A_4)$.

مثال ۱: فرض کنید $A = \begin{bmatrix} I_2 & I_2 \\ I_2 & I_2 \end{bmatrix}$, $A_1 = I_2$, $A_4 = I_2$ بدیهی است که $W(A_1) = \{1\}$ و $W(A_4) = \{1\}$ اما در حالتی

ششمین همایش ملی ریاضی و آمار

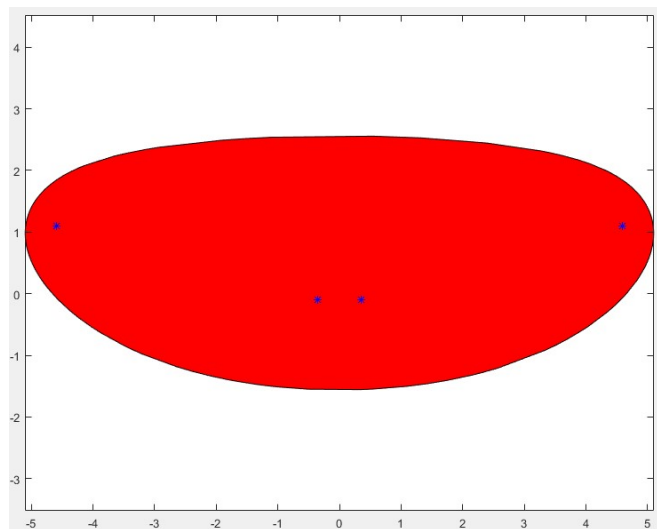
<https://conf.gonbad.ac.ir/msc1404>

که $f = g$ باشد A^{fg} منفرد است.

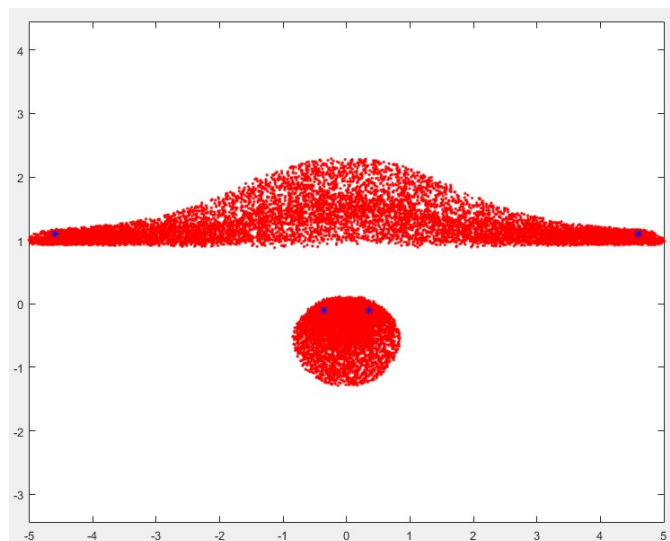
مثال ۲: برد عددی و برد عددی درجه دوم دسته‌های خطی ماتریس‌های A و B رسم شده است که

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, A_3 = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}, A_4 = \begin{bmatrix} i & 4i \\ -3i & i \end{bmatrix}, A := \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{bmatrix}, B := \begin{bmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{bmatrix}$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, B_3 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, B_4 = \begin{bmatrix} 0 & i \\ -2i & 0 \end{bmatrix}$$



شکل ۱: برد عددی



شکل ۱: برد عددی درجه دوم



ششمین همایش ملی ریاضی و آمار

<https://conf.gonbad.ac.ir/msc1404>

۳- مراجع

- [1] Kronecker, L., Algebraische reduction der schaorem bilinearen formen, S-B. Akad. Berlin, 1890, 763- 776.
- [2] Langer, H., Markus, A., Matsaev, V., Tretter, C., A new concept for block operator matrices: the quadratic numerical range, Linear algebra application, 330, 2001, 89 – 112.
- [3] Markus, J., Matsaev, V., Some estimates of numerical range of matrix polynomials, Linear algebra application, 267, 1997, 101 – 111.
- [4] Rodman, L., Numerical range of matrix polynomials, SIAM J. Matrix analysis application, 15, 1994, 1256 – 1265.
- [5] Tratter, C., Spectral theory of block operator matrices and applications, Imperial College Press, London, 2008.
- [6] Wu, D., Chen, A., Geometry of numerical range of linear operator polynomial, Chinese annals of mthematics, 46(1), 151-162, 2025.

ششمین همایش ملی ریاضی و آمار

<https://conf.gonbad.ac.ir/msc1404>

F-387, صص ۴۶-۵۰.

برآورد انقباضی بر اساس برآورد E-بیز

شهرام یعقوبزاده شهرستانی^۱، امراله جعفری^۲، محمد مولائی^۳.استادیار، دانشگاه پیام نور، yagoubzade@pnu.ac.irاستادیار، دانشگاه پیام نور، amrollahjafari@pnu.ac.irاستادیار، دانشگاه پیام نور، m.mola@pnu.ac.ir

چکیده

وقتی در باره پارامتر نامعلوم یک توزیع، اطلاعاتی به صورت یک مقدار حدسی در دسترس باشد، آن گاه برآورد انقباضی پارامتر نامعلوم را می توان تعریف کرد. در این مقاله برآورد E-بیز انقباضی پارامتر توزیع رایلی معکوس تحت تابع زبان آنتروپی عمومی به دست آورده می شود و با استفاده از یک مجموعه داده های واقعی با بهترین برآورد نارایب با کمترین واریانس پارامتر توزیع رایلی معکوس به کمک کارایی نسبی مقایسه می شود.

کلمات کلیدی: توزیع رایلی معکوس، برآورد E-بیز انقباضی، بهترین برآورد نارایب با کمترین واریانس، تابع زبان آنتروپی عمومی.

۱- مقدمه

در بسیاری از موقعیت های کاربردی، محقق اطلاعات پیشینی در باره پارامتر مجهول به صورت یک مقدار حدسی دارد. با توجه به این مقدار حدسی، برآوردگرهایی موسوم به برآوردهای انقباضی تولید می شود که توسط تامپسون [1] به صورت زیر معرفی شد.

$$T = k\hat{\theta} + (1-k)\theta_0, 0 < k < 1 \quad (1)$$

که در آن θ_0 مقدار حدسی θ و $\hat{\theta}$ هر برآوردگر معمول θ است و k نیز ضریب انقباضی نام دارد. و طوری تعیین می شود که مخاطره برآوردگر بر اساس رابطه (۱) مینیمم شود برآوردهای انقباضی در زمینه های مختلف علم مانند برآورد میانگین زمان بقا در مطالعات ایپیمولوژیک، برآورد در مطالعات نقشه برداری، پیش بینی سرمایه و برآورد نرخ های مرگ و میر کاربرد دارد. چندین نویسنده از برآوردهای انقباضی در نظریه برآوردها استفاده کردند. برآورد بیزی و برآورد بیزی انقباضی پارامتر شکل توزیع پارتو را تحت تابع زبان آنتروپی توسط پراکاش [2] به دست آورده شد. ال-همیاری و ال-دباگ [3] خانواده ای از برآوردهای انقباضی را برای پارامتر شکل توزیع وایبول به دست آوردند. سلمان و شریف [4] آزمون اولیه برآورد بیزی انقباضی پارامتر مقیاس توزیع نمایی را تحت تابع زبان درجه دوم به دست آوردند. یکی از روش های برآورد بیز مبتنی بر توزیع های پیشین و اعمال شرایطی خاص روی ابرپارامترهای آن، روش E-بیز است که توسط هان [5] معرفی شد. گاهی اوقات وسیع بودن حوزه تغییرات پارامتر روی فضای پارامتر، باعث افزایش خطای برآوردگر پسین بیزی می شود که روش برآورد E-بیز نقش مهمی در کاهش این خطا دارد. در این مقاله برآورد E-بیز پارامتر توزیع رایلی معکوس به دست آورده شده و سپس بر اساس آن و به کمک رابطه (۱) برآورد انقباضی تعیین می شود که در این مقاله برآورد E-بیز انقباضی نامیده می شود. توزیع رایلی معکوس که توسط تریر [6]

ششمین همایش ملی ریاضی و آمار

<https://conf.gonbad.ac.ir/msc1404>

معرفی شد یکی از مهم ترین توزیع هایی است که در نظریه قابلیت اعتماد و آزمون های مربوط به طول عمر کاربرد دارد. در این مقاله، تابع چگالی احتمال توزیع رایلی معکوس با پارامتر θ به صورت زیر در نظر گرفته می شود.

$$f(x, \theta) = \frac{2\theta}{x^3} e^{-\frac{\theta}{x^2}}, x > 0, \theta > 0 \quad (2)$$

تابع زیان $L(\theta, \hat{\theta}) \propto \left(\frac{\hat{\theta}}{\theta}\right)^p - p \ln\left(\frac{\hat{\theta}}{\theta}\right) - 1, p \neq 0$ که تابع زیان آنتروپی عمومی نام دارد، توسط کالابریا و پولسینی

[7] معرفی شد و برآورد بیز θ تحت این تابع زیان به صورت $\hat{\theta}_B = [E(\theta^{-p} | data)]^{-\frac{1}{p}}$ ارائه شد.

۲- برآورد انقباضی

در این بخش ابتدا برآورد E-بیز (هان [5])، تعریف و سپس برآورد E-بیز پارامتر توزیع رایلی معکوس به دست آورده می شود. **تعریف ۱:** فرض کنید b ابر پارامتر در توزیع پیشین θ و $\pi(b)$ توزیع پیشین b و برآورد بیز b نیز $\hat{\theta}_B(b)$ باشند، آن گاه برآورد E-بیز θ که با نماد $\hat{\theta}_{EB}$ نشان داده می شود از رابطه $\hat{\theta}_{EB} = E[\hat{\theta}_B(b)] = \int \hat{\theta}_B(b) \pi(b) db$ به دست می آید. فرض کنید X_1 و ... و X_n یک نمونه تصادفی از توزیع با تابع چگالی احتمال (۲) و θ دارای توزیع پیشین به صورت

$$\pi(\theta|a, b) = \frac{b^a}{\Gamma(a)} \theta^{a-1} e^{-b\theta}, \theta > 0, a > 0, b > 0 \quad (3)$$

باشند برای محاسبه برآورد E-بیز θ ، با توجه به روش هان [5]، a و b طوری در نظر گرفته می شوند که $\pi(\theta|a, b)$ نسبت به θ کاهشی باشد. پس با توجه به رابطه $\frac{d\pi(\theta|a, b)}{d\theta} = \frac{b^a \theta^{a-2} e^{-b\theta}}{\Gamma(a)} ((a-1) - b\theta)$ باید $0 < a \leq 1$ و $b > 0$ باشند. برگر [8] نشان داد که بزرگ بودن b باعث کاهش کارایی برآورد بیز θ می شود. بنابر این ابر پارامتر b باید از بالا کراندار بوده و به صورت $0 < b < c$ که c عددی ثابت است، در نظر گرفته می شود. هان [9] نشان داد که مناسب ترین توزیع پیشین b ، توزیع یکنواخت است. بنابر این در این مقاله توزیع پیشین b یعنی $\pi(b)$ ، توزیع یکنواخت در بازه $(0, c)$ در نظر گرفته می شود. همچنین با توجه به شرط $0 < a \leq 1, a = 1$ فرض می شود که در این صورت توزیع پیشین در رابطه (۳) به $\pi(\theta|b) = be^{-b\theta}, \theta > 0, b > 0$ تبدیل می شود. بنابر این به کمک $\pi(\theta|b)$ و تابع درستنمایی

$$L(\theta) = (2\theta)^n \left(\prod_{i=1}^n \frac{1}{x_i^3} \right) e^{-\theta \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i^2}}$$

و با فرض $Y = \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i^2}$ ، توزیع پسین θ توزیع گاما با پارامترهای $\alpha = n + 1$ و $\beta = b + Y$ به دست می آید. در نتیجه برآورد بیز θ تحت تابع زیان آنتروپی عمومی به صورت زیر به دست می آید.

$$\hat{\theta}_B(b) = \left(\frac{\Gamma(n+1-p)}{\Gamma(n+1)} \right)^{\frac{1}{p}} \frac{1}{b+Y} \quad (4)$$

که تابع ریسک آن به صورت

ششمین همایش ملی ریاضی و آمار

<https://conf.gonbad.ac.ir/msc1404>

$$R_{\hat{\theta}_{EB}(b)}(\theta) = \begin{cases} \frac{n}{\Gamma(n+1-p)(b\theta)^p} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(p)_j \Gamma(n+j)}{(b\theta)^j} + pI - 1, & b > Y \\ \frac{n}{\Gamma(n+1-p)(\theta)^{2p}} \sum_{j=0}^{\infty} (p)_j \Gamma(n+p-j)(b\theta)^j + pI - 1, & b < Y \end{cases}$$

محاسبه می‌شود که در آن

$$I = \left(\frac{\Gamma(n+1-p)}{\Gamma(n+1)} \right)^{\frac{1}{p}} \frac{\theta^n}{\Gamma(n)} \int_0^{\infty} \left(\frac{b+y}{\theta} \right) y^{n-1} e^{-\theta y} dy,$$

$$(p)_j = \frac{(-1)^j p(p+1) \dots (p+j-1)}{j!}$$

هستند. با استفاده از تعریف ۱ و رابطه (۴)، برآورد E-بیز θ به صورت زیر به دست می‌آید.

$$\hat{\theta}_{EB} = \frac{1}{c} \left(\frac{\Gamma(n+1-p)}{\Gamma(n+1)} \right)^{\frac{1}{p}} \int_0^c \frac{db}{b+y} = \frac{1}{c} \left(\frac{\Gamma(n+1-p)}{\Gamma(n+1)} \right)^{\frac{1}{p}} \ln \left(\frac{c+Y}{Y} \right) \quad (5)$$

به کمک روابط (۱) و (۵) برآورد E-بیز انقباضی پارامتر θ به صورت زیر محاسبه می‌شود.

$$T = k\hat{\theta}_{EB} + (1-k)\theta_0 = \frac{k}{c} \left(\frac{\Gamma(n+1-p)}{\Gamma(n+1)} \right)^{\frac{1}{p}} \ln \left(\frac{c+Y}{Y} \right) + (1-k)\theta_0 \quad (6)$$

به کمک تابع چگالی $V = \ln \left(\frac{c+Y}{Y} \right)$ تابع ریسک T عبارت است از:

$$R_T(\theta) = \frac{1}{\theta^p} \int_0^{\infty} [mk \ln(1+v) + (1-k)\theta_0]^p g_V(v) dv - p \int_0^{\infty} \ln [mk \ln(1+v) + (1-k)\theta_0] g_V(v) dv + p \ln \theta - 1$$

که در آن $m = \frac{1}{c} \left(\frac{\Gamma(n+1-p)}{\Gamma(n+1)} \right)^{\frac{1}{p}}$ است. اکنون k طوری تعیین می‌شود که $R_T(\theta)$ مینیمم شود. بنابر این با فرض δ

$\theta - \theta_0$ تحت شرط $k^* = \frac{\delta}{m \ln(1+v) - \theta_0}$ ، $\ln(1+v) > \frac{\theta_0}{m}$ تعیین می‌شود. با جایگذاری k^* به جای k در رابطه (۶)

برآورد E-بیز انقباضی θ به دست می‌آید. از طرفی برآورد UMVU پارامتر θ ، $T^* = \frac{n-1}{Y}$ می‌شود. تابع ریسک T^* نیز به

صورت $1 - R_{T^*}(\theta) = \frac{(n-1)^p \Gamma(n-p)}{\Gamma(n)} + p\Psi(n) + p \ln \left(\frac{\theta}{n-1} \right) - 1$ به دست می‌آید که در آن که $\Psi(\cdot)$ تابع دی‌گاما نام

دارد.

۳- تحلیل داده‌ها

در این بخش برآوردهای T و T^* با استفاده از یک مجموعه داده‌های واقعی به کمک معیار $RE(T, T^*) = \frac{R_{T^*}(\theta)}{R_T(\theta)}$ که کارایی

نسبی T نسبت به T^* نام دارد با هم مقایسه می‌شوند. در این بخش از یک مجموعه داده‌های واقعی که در پروسپان [10]

گزارش شده و مربوط به زمان‌های خرابی سیستم تهویه هوای هواپیمای بوئینگ ۷۲۰ است که عبارتند از: ۳۲۶، ۳۸۶، ۵۲۰،

۱۷۴، ۱۵۳، ۷۰، ۵۹، ۵۷، ۴۸، ۲۹، ۲۹، ۲۷، ۲۶، ۲۱ و ۱۲. برای تحلیل روش‌های برآورد اشاره شده در بخش ۲ استفاده می‌شود.

ششمین همایش ملی ریاضی و آمار

<https://conf.gonbad.ac.ir/msc1404>

به کمک این مجموعه داده‌ها مقادیر T^* ، T و $RE(T, T^*)$ به ازای $\delta = 1, 2, 3$ و $c = 2, 3$ و $p = -1.5, 2$ به دست آورده شده‌اند که در جدول ۱ گزارش شده است. از جدول ۱ نتیجه گرفته می‌شود که در حالت $p < 0$ برآورد T^* از T و در حالت $p > 0$ برآورد T از T^* کارتر است.

جدول ۱. مقادیر T^* ، T و RE برای داده‌های مربوط به خرابی سیستم تهویه هوای هواپیما

RE	T	T^*	δ	c	p
	۹۴۹/۲۱	۸۸/۷۵	۱	۲	-۱/۵
					۰/۹۰۴۲
	۹۴۷/۲۷	۸۸/۷۵	۲		
					۰/۹۰۴۴
۰/۹۰۴۷	۹۴۵/۳۳	۸۸/۷۵	۳		
۰/۹۰۴۳	۹۴۹/۲۲	۸۸/۷۵	۱	۳	
۰/۹۰۴۵	۹۴۷/۲۸	۸۸/۷۵	۲		
۰/۹۰۴۶	۹۴۵/۳۴	۸۸/۷۵	۳		
	۹۴۹/۲۱	۸۸/۷۵	۱	۲	۲
					۱/۰۹۰۵
	۹۴۷/۲۵	۸۸/۷۵	۲		
					۱/۰۹۰۹
	۹۴۵/۳۰	۸۸/۷۵	۳		
					۱/۰۹۱۳
	۹۴۹/۲۲	۸۸/۷۵	۱	۳	
					۱/۰۹۰۶
	۹۴۷/۲۶	۸۸/۷۵	۲		
					۱/۰۹۰۸
	۹۴۵/۳۲	۸۸/۷۵	۳		
					۱/۰۹۱۲

۴- نتیجه و جمع‌بندی

در این مقاله برآورد E-بیز انقباضی پارامتر توزیع رایلی معکوس تحت تابع زیان آن‌تروپی عمومی به دست آورده شد و سپس به کمک یک مجموعه داده‌های واقعی با بهترین برآورد ناریب با کمترین واریانس بطور یکنواخت پارامتر توزیع رایلی معکوس مقایسه گردید. نتایج تحلیل داده‌ها بیانگر آن است که در حالت $p < 0$ برآورد ناریب با کمترین واریانس بطور یکنواخت و در حالت $p > 0$ برآورد E-بیز انقباضی کارتر است. همچنین در هر دو حالت $p < 0$ و $p > 0$ با افزایش δ در صورت ثابت ماندن c و با افزایش c در صورت ثابت ماندن δ ، کارایی برآوردگر E-بیز انقباضی افزایش می‌یابد.



ششمین همایش ملی ریاضی و آمار

<https://conf.gonbad.ac.ir/msc1404>

۵- مراجع

- [1] Thompson, J.R, Some Shrinkage Techniques for Estimating the Mean, *Journal of American Statistical Association*, **63**, 113-122, 1968.
- [2] Prakash, G, Some Estimators for the Pareto Distribution, *Journal of Scientific Research*, 236-247, 2009.
- [3] Al-Hemyari, Z.A. and Al-Dabag, H.A. (2012), A Class of Shrinkage Testimators for the Shape Parameter of the Weibull Lifetime Model, *Pakistan Journal of Statistics and Operational Research*, **8** (2), 167-184, 2012.
- [4] Salman, A.N. and Shareef, R.A, Bayesian Shrinkage Estimator for the Scale Parameter of Exponential Distribution under Improper Prior Distribution, *International Journal of Statistics and Applications*, **4** (3), 135-143, 2014.
- [5] Han, M, The structure of hierarchical prior distribution and its applications, *Chinese Operations Research and Management Science*, **6**(3), 31-40, 1977.
- [6] Treyer, V.N, *Doklady Acad. Nauk, Belorus*, U.S.S.R., 1964.
- [7] Calabria, R. and Pulcini, G, Point Estimation under Asymmetric Loss Functions for Left Truncated Exponential Samples, *Communications in Statistics-Theory & Methods*, **25**(3), 585-600, 1996.
- [8] Berger, J.O, *Statistical Decision Theory and Bayesian Analysis*, second ed., Springer-Verlag, New York, 1985.
- [9] Han, M. (2011), E-Bayesian Estimation of the Reliability derived from Binomial distribution, *Applied Mathematical Modelling*, **35**, 2419-2424., 2011.
- [10] Proschan, F, Theoretical Explanation of Observed Decreasing Failure Rate, *Technometrics*, **5**, 375-383, 1963.

ششمین همایش ملی ریاضی و آمار

<https://conf.gonbad.ac.ir/msc1404>

F-392, صص ۵۱-۵۶.

تحلیل کتاب درسی هندسه ۲ پایه یازدهم بر اساس شاخص خلاقیت گیلفورد

هادی محمدی^۱، طاهره پورصادق فرد^۲

۱. دانشجوی کارشناسی، گروه ریاضی و آمار، واحد فیروزآباد، دانشگاه آزاد اسلامی، فیروز آباد، ایران: tahrre.madavikya2026@mail.ir

۲. استادیار گروه، گروه ریاضی و آمار، واحد فیروزآباد، دانشگاه آزاد اسلامی، فیروز آباد، ایران: Ta.poursadeghfard@iau.ac.ir

چکیده

این پژوهش با هدف اصلی تحلیل محتوای کتاب درسی هندسه ۲ پایه یازدهم نظام آموزشی جمهوری اسلامی ایران بر اساس مؤلفه‌های اساسی نظریه ساخت عقلانی گیلفورد (تفکر سیال، انعطاف‌پذیری، ابتکار و آزادی ذهنی) انجام شد. این تحلیل به منظور ارزیابی میزان توانمندی کتاب در توسعه تفکر واگرا (خلاقانه) در دانش‌آموزان صورت پذیرفت. جهت سنجش دقیق میزان رشد خلاقیت، محتوای کتاب در سه حوزه اصلی متنی (شامل تعاریف و مفاهیم)، تصویری (شامل نمودارها و اشکال)، و فعالیت‌های عملی (شامل تمرین‌ها و مسائل) مورد کدگذاری و تجزیه و تحلیل کمی قرار گرفت. داده‌ها با استفاده از شاخص‌های اختصاصی برگرفته از مدل گیلفورد استخراج و تحلیل شدند. یافته‌ها: نتایج حاصل از تجزیه و تحلیل سه فصل کتاب، شکاف قابل توجهی را در سهم تفکر واگرا نشان داد. در بخش متنی، تنها ۲۷٪ از محتوا به ترویج تفکر واگرا اختصاص داشت، در حالی که ۷۳٪ آن کاملاً بر تفکر همگرا (تمرکز بر یک راه‌حل مشخص) متمرکز بود. در فعالیت‌های عملی و تمرین‌ها، این عدم توازن شدیدتر مشاهده شد؛ ۶۵٪ فعالیت‌ها ماهیت همگرا داشتند و فرصت‌های کمی (تنها ۲۰٪) برای تفکر واگرا و ارائه پاسخ‌های متعدد فراهم می‌شد. بخش تصویری نیز از منظر تحریک خلاقیت ضعیف عمل کرد؛ ۵۰٪ نمودارها صرفاً توصیفی بودند و تنها ۱۵٪ به تصاویر مسئله‌محور که نیازمند تفسیر خلاقانه فضایی باشند، اختصاص یافت. نتیجه‌گیری: یافته‌ها به‌طور قاطع نشان می‌دهند که ساختار و محتوای کتاب درسی هندسه ۲ پایه یازدهم در حال حاضر گرایش قوی به سمت آموزش مبتنی بر تفکر همگرا دارد و فرصت‌های کافی برای پرورش مؤلفه‌های کلیدی خلاقیت گیلفورد (به‌ویژه ابتکار و انعطاف‌پذیری) را در اختیار دانش‌آموزان قرار نمی‌دهد. این امر ضرورت بازنگری جدی در طراحی آموزشی و محتوایی کتاب را بر اساس چارچوب‌های تفکر خلاق، به‌منظور ارتقاء مهارت‌های تحلیلی و نوآورانه دانش‌آموزان در حوزه هندسه، تأیید می‌کند.

کلمات کلیدی: خلاقیت گیلفورد، تفکر واگرا و همگرا، تحلیل محتوا، هندسه ۲.

۱- مقدمه

در دنیای امروز که با پیچیدگی‌های فزاینده‌ای روبروست، خلاقیت به عنوان یکی از مهارت‌های بنیادین، نقشی حیاتی در فرآیند آموزش ایفا می‌کند (کافمن، ۲۰۱۸). به ویژه در درس هندسه، این مهارت می‌تواند ابزاری قدرتمند برای توانمندسازی دانش‌آموزان در مواجهه با مسائل نوین باشد. با این حال، نظام‌های آموزشی اغلب فرصت کافی برای پرورش این استعداد را فراهم نمی‌آورند و روش‌های سنتی و قالبی، مانعی بر سر راه تقویت تفکر واگرا و خلاقانه، که اساس پیشرفت علمی محسوب می‌شود، ایجاد می‌کنند (نجفی مرغملکی و سعادت‌مند، ۱۴۰۳). این در حالی است که ریاضیات و به‌طور خاص هندسه، به دلیل ماهیت تحلیلی و ساختارمند خود، ظرفیت بالایی برای پرورش خلاقیت دارند، به طوری که چارچوب‌هایی چون مدل گیلفورد، تفکر واگرا را به عنوان مولفه اصلی خلاقیت در کنار تفکر همگرا برای یافتن راه‌حل‌های بهینه معرفی می‌کند (خارستانی و خادمی، ۱۴۰۳؛ شیروانی شیرینی و همکاران، ۱۳۹۹؛ یوسف‌زاده درزی، ۱۴۰۳). بررسی چگونگی تقویت این مولفه‌ها از طریق محتوای کتب درسی، مانند کتب ریاضی و هندسه در پایه‌های مختلف، امری ضروری است. در این راستا، تحلیل محتوای کتاب ریاضی دوم دبستان

ششمین همایش ملی ریاضی و آمار

<https://conf.gonbad.ac.ir/msc1404>

(خارستانی و خادمی، ۱۴۰۳)، تحلیل محتوای کتاب ریاضی پنجم دبستان (شیروانی شیری و همکاران، ۱۳۹۹)، و بررسی میزان تأثیر محتوای کتاب هندسه ۳ پایه دوازدهم (یوسفزاده درزی، ۱۴۰۳)، همگی به ارزیابی این کتب پرداخته‌اند. همچنین، تحلیل محتوای کتاب هندسه یازدهم با روش ویلیام رومی (بابلی و بهمنی، ۱۴۰۱)، تحلیل محتوای کتاب جدیدالتألیف ریاضی نهم دوره اول متوسطه با تمرکز بر مؤلفه‌های فعال محور (پورحسن و شیخی، ۱۳۹۵)، و تحلیل محتوای کتاب هندسه ۱ پایه دهم براساس روش ویلیام رومی (عظیم پور، واحدی و منصوری، ۱۳۹۹)، گامی در جهت شناسایی پتانسیل‌های موجود در کتب درسی برای پرورش خلاقیت محسوب می‌شوند. در کنار این، توجه به عوامل تأثیرگذار دیگر مانند نقش معلم در ایجاد خلاقیت و تأثیر آن بر پیشرفت دانش‌آموزان (شریفی، شیخ احمدی و رستمی، ۱۴۰۲)، بررسی تأثیر به کارگیری برنامه درسی لگومحور بر خلاقیت دانش‌آموزان در مفاهیم ریاضی دوره اول ابتدایی (نجفی مرغملکی و سعادت‌مند، ۱۴۰۳)، و بررسی تأثیر آموزش مبتنی بر طرح مسأله‌ی بازپاسخ، بر خلاقیت دانش‌آموزان پایه‌ی دهم (یوسفی، ریحانی و بهزادی، ۱۴۰۴)، نشان‌دهنده تلاش‌های صورت گرفته برای به کارگیری رویکردهای نوین آموزشی است. ابعاد گسترده‌تر تربیت نیز در این میان اهمیت می‌یابد؛ بررسی فرهنگ مدرسه با نحوه و میزان خلاقیت دانش‌آموزان (حسینی دیزجی، ۱۴۰۱)، نشان‌دهنده تأثیر محیط آموزشی بر شکوفایی خلاقیت است. همچنین، تحلیل محتوای کتاب‌های تفکر و سبک زندگی دوره اول متوسطه برحسب میزان توجه به مؤلفه‌های سرمایه فرهنگی (حرفتی‌سبحانی لیل‌آبادی و پیری، ۱۳۹۶)، گامی در جهت فهم جامع‌تر تربیت خلاق در ابعاد فرهنگی و اجتماعی است. در این میان، رابطه خلاقیت مدیران و توسعه سازمانی در مدارس ابتدایی (احمدی و جهانی، ۱۴۰۴)، نشان می‌دهد که نگرش و فرهنگ خلاقانه در سطوح مدیریتی نیز می‌تواند به پیشبرد اهداف آموزشی و تربیتی یاری رساند. در نهایت، خلاقیت به عنوان گامی مهم به سوی آینده‌ای روشن‌تر، نه تنها در آموزش، بلکه در تمامی ابعاد زندگی فردی و اجتماعی نقشی کلیدی ایفا می‌کند. کافمن، ۲۰۱۸). کتاب هندسه ۲ پایه یازدهم که در راستای برنامه درسی ملی تدوین شده، با فعالیت‌هایی طراحی شده است که می‌توانند تفکر تحلیل‌گرانه و خلاق دانش‌آموزان را تقویت کنند. با این حال، ارزیابی دقیق میزان توجه کتاب به خلاقیت نیازمند تحلیل محتوا بر اساس مدل گیلفورد است. پژوهش حاضر با تحلیل محتوای این کتاب، میزان پرداخت آن به تفکر واگرا و همگرا را بررسی کرده، نقاط قوت و ضعف را شناسایی می‌کند و در نهایت پیشنهاداتی برای بهبود طراحی محتوا با هدف تقویت تفکر خلاق و توانایی حل مسائل هندسی ارائه می‌دهد.

۲. روش تحقیق

این پژوهش با هدف ارزیابی میزان توجه کتاب درسی "هندسه ۲" پایه یازدهم به شاخص‌های خلاقیت گیلفورد (تفکر واگرا، همگرا، انعطاف‌پذیری و آزادی ذهنی)، به تحلیل محتوای آن می‌پردازد. یافته‌های این تحقیق به طراحان کتاب درسی کمک خواهد کرد تا با بهبود محتوا، دانش‌آموزان را به تفکر خلاق و حل مسئله تشویق کنند؛ در همین راستا، این پژوهش به این پرسش‌ها پاسخ می‌دهد که آیا محتوای کتاب مذکور، تفکر واگرا و خلاقانه را تحریک کرده، دانش‌آموزان را به یافتن راه‌حل‌های متعدد و خلاقانه ترغیب نموده و آن‌ها را به تحلیل مسائل و استفاده از استدلال‌های منطقی و خلاقانه سوق می‌دهد یا خیر.

۱.۲ روش تحلیل:

این پژوهش از روش تحلیل محتوا با بهره‌گیری از شاخص خلاقیت گیلفورد برای بررسی کتاب درسی "هندسه ۲" پایه یازدهم استفاده کرده است. واحدهای تحلیل شامل متن (جملات برای سنجش تفکر واگرا و همگرا)، تصاویر (برای ارزیابی کمک به تفکر خلاق و فضایی) و فعالیت‌ها/تمرین‌ها/مسائل (برای سنجش تقویت مهارت‌های تفکری و خلاقانه) بوده‌اند. برای این منظور، سه فصل از کتاب به صورت تصادفی برای کدگذاری جملات، تعدادی تصویر برای سنجش تأثیر بر تفکر خلاقانه و ۲۰ صفحه دیگر برای بررسی فعالیت‌های خلاقانه انتخاب و کدگذاری شده‌اند.



ششمین همایش ملی ریاضی و آمار

<https://conf.gonbad.ac.ir/msc1404>

۲,۲ تجزیه و تحلیل داده‌ها:

داده‌ها با استفاده از روش‌های کدگذاری کیفی و بر اساس شاخص‌های خلاقیت گیلفورد (تفکر واگرا، همگرا، انعطاف‌پذیری ذهنی و آزادی ذهنی) تحلیل شده‌اند. این تحلیل، محتوای کتاب درسی را از نظر میزان تحریک تفکر خلاق و تفکر انتقادی ارزیابی کرده است.

۳- یافته‌ها

تحلیل محتوای کتاب درسی هندسه ۲ پایه یازدهم بر اساس شاخص‌های خلاقیت گیلفورد در سه سطح متن، تصاویر و فعالیت‌ها و در سه فصل اصلی کتاب انجام گرفت. نتایج نشان داد که میزان توجه به شاخص‌های خلاقیت در فصل‌ها و اجزای کتاب متفاوت است و الگوی کلی نشان‌دهنده غلبه‌ی رویکرد همگرا و الگویی بر تفکر واگرا و خلاقانه است. ۱. پاسخ به سؤال اول پژوهش:

آیا محتوای کتاب هندسه ۲ پایه یازدهم به نحوی طراحی شده است که تفکر واگرا و خلاقانه دانش‌آموزان را تحریک کند؟ تحلیل متن کتاب نشان داد که فقط بخشی از توضیحات، مثال‌ها و روابط موجود در کتاب به تحریک تفکر واگرا منجر می‌شود. اکثراً مطالب به صورت گام‌به‌گام و با پاسخ مشخص ارائه شده‌اند، که باعث محدود شدن آزادی ذهنی می‌گردد. در حدود ۲۷٪ از جملات متنی شامل جملاتی بودند که می‌توانستند دانش‌آموز را به تفکر خلاق یا جستجوی راه‌حل‌های متفاوت سوق دهند؛ اما ۷۳٪ تمرکز بر آموزش مستقیم، استنتاج منطقی و پاسخ قطعی داشتند.

جدول ۱. توزیع شاخص‌های تفکر در محتوای متنی کتاب هندسه ۲ پایه یازدهم

نوع تفکر در متن کتاب	تعداد واحدهای کدگذاری شده	درصد فراوانی
تفکر واگرا (باز، خلاقانه)	65	۲۷٪
تفکر همگرا (الگویی، منطقی)	175	۷۳٪
جمع کل	240	۱۰۰٪

نتیجه: این الگو نشان می‌دهد که تفکر واگرا در بخش متنی کتاب حضور دارد؛ اما در سطح محدود و نیازمند بازنگری محتوایی است تا سؤالات باز و موقعیت‌های حل مسئله خلاقانه افزایش یابد. ۲. پاسخ به سؤال دوم پژوهش:

آیا تمرین‌ها و مسائل کتاب به گونه‌ای تنظیم شده‌اند که از دانش‌آموزان بخواهند چندین راه‌حل مختلف و خلاقانه برای مسائل هندسی پیدا کنند؟

تحلیل محتوای کتاب "هندسه ۲" پایه یازدهم نشان می‌دهد که تنها ۲۰٪ فعالیت‌ها (از ۸۰ فعالیت) پاسخ‌های خلاقانه را تشویق می‌کنند. بیشتر تمرین‌ها بر تثبیت دانش هندسی تمرکز دارند تا برانگیختن خلاقیت.

جدول ۲. میزان توجه به شاخص‌های خلاقیت در تمرین‌ها و فعالیت‌های کتاب هندسه ۲

شاخص خلاقیت در فعالیت‌ها	تعداد مشاهده	درصد فراوانی
تفکر واگرا (چند پاسخ ممکن)	16	۲۰٪
تفکر همگرا (پاسخ واحد)	52	۶۵٪
انعطاف‌پذیری ذهنی (جابجایی در مسئله)	8	۱۰٪
آزادی ذهنی (طراحی راه‌حل خاص)	4	۵٪
جمع کل	80	۱۰۰٪

نتیجه:

ششمین همایش ملی ریاضی و آمار

<https://conf.gonbad.ac.ir/msc1404>

بر اساس جدول ۲، بیشتر تمرین‌های کتاب هندسه ۲ (۶۵٪) پاسخ واحد دارند و تنها یک پنجم آن‌ها تفکر واگرا را تشویق می‌کنند. شاخص‌های انعطاف‌پذیری ذهنی (۱۰٪) و آزادی ذهنی (۵٪) نیز محدود هستند، که نشان می‌دهد تمرکز کتاب بر تمرین محوری و تثبیت آموخته‌هاست تا خلاقیت محوری.

۳. پاسخ به سؤال سوم پژوهش:

آیا کتاب هندسه ۲ پایه یازدهم، به اندازه کافی فعال و انگیزشی است که دانش‌آموزان را به تحلیل مسائل و استفاده از استدلال‌های خلاقانه تشویق کند؟

در ارزیابی تصاویر و نمودارها مشخص شد که حدود ۳۵٪ تصاویر ماهیتی آموزشی ساده دارند و تنها ۱۵٪ از آن‌ها قابلیت تحریک تفکر فضایی یا خلاقانه دارند. بسیاری از نمودارها صرفاً برای تبیین روابط ریاضی و نه کاوش مسئله طراحی شده‌اند. همچنین فضای کلی کتاب از نظر طراحی، رنگ و تنوع تصویری خلاقانه نسبتاً پایین است.

جدول ۳. تحلیل تصاویر و نمودارهای کتاب هندسه ۲ از منظر خلاقیت و یادگیری فعال

نوع عنصر تصویری	تعداد بررسی شده	هم‌راستا با خلاقیت (%)	توضیح
تصاویر مفهومی (کمک به درک روابط هندسی)	40	۳۵٪	بیشتر آموزشی و توضیحی
تصاویر مسئله‌محور یا فضایی	17	۱۵٪	تحریک‌کننده تفکر فضایی، محدود
نمودارها و شکل‌های توضیحی	23	۵۰٪	تکراری و استاندارد
جمع کل عناصر تصویری	80	—	خلاقیت بصری کم و محدود به ذکر رابطه هندسی

نتیجه: بررسی عناصر بصری کتاب نشان داد که حدود نیمی از نمودارها صرفاً برای نمایش روابط ریاضی استفاده شده‌اند و فرصت زیادی برای تفکر خلاقانه ایجاد نمی‌کنند. تنها ۱۵٪ از تصاویر جنبه‌ی مسئله‌محور و تفکربرانگیز دارند. نبود رنگ، تنوع تصویری و بازی‌های فکری مرتبط با هندسه باعث شده کتاب از نظر بصری بیشتر به یادگیری مفهومی خطی تمایل داشته باشد تا برانگیختن تخیل فضایی دانش‌آموز. خلاصه کلی یافته‌ها در جدول زیر است:

جدول ۴. میانگین درصد حضور شاخص‌های خلاقیت در کل کتاب هندسه ۲

وضعیت	درصد حضور در کل کتاب	شاخص خلاقیت گیلفورد
کم، نیازمند تقویت	۲۵٪	تفکر واگرا
غالب بر کل محتوا	۵۵٪	تفکر همگرا
محدود به برخی فعالیت‌ها	۱۲٪	انعطاف‌پذیری ذهنی
بسیار اندک، کمتر مورد توجه	۸٪	آزادی ذهنی

الگوی توزیع شاخص‌های خلاقیت نشان می‌دهد که کتاب هندسه ۲ مفاهیم را دقیق و نظام‌مند ارائه کرده، اما به خلاقیت و تفکر واگرا کمتر پرداخته است. افزودن تمرینات چندمسیره‌حل، فعالیت‌های گروهی و تصاویر مسئله‌محور می‌تواند انگیزش و خلاقیت هندسی را افزایش دهد. این یافته‌ها برای ایجاد تعادل میان یادگیری منطقی و خلاقانه در ویرایش‌های آتی کتاب‌های درسی راهگشا خواهد بود.

ششمین همایش ملی ریاضی و آمار

<https://conf.gonbad.ac.ir/msc1404>

۴- نتیجه و جمع‌بندی

این پژوهش به روشنی شکاف میان محتوای کنونی کتاب درسی هندسه ۲ پایه یازدهم و الزامات پرورش خلاقیت دانش‌آموزان را آشکار می‌سازد. تحلیل‌ها نشان دادند که با سلطه قوی تفکر همگرا (۷۳٪) در متن کتاب، بستر کافی برای تحریک تفکر واگرا، که لازمه‌ی خلاقیت است، وجود ندارد و این امر دانش‌آموزان را به سمت پاسخ‌های از پیش تعیین‌شده سوق می‌دهد. فعالیت‌ها و تمرین‌ها نیز با درصد پایین انعطاف‌پذیری ذهنی (۱۰٪) و آزادی ذهنی (۵٪)، فرصت‌های کمی برای ارائه راه‌حل‌های بدیع فراهم می‌کنند و توانایی حل مسئله‌ی دانش‌آموز را در دنیای واقعی که کمتر مسائل آن دارای یک پاسخ واحد هستند، محدود می‌سازند. علاوه بر این، عناصر بصری کتاب عمدتاً نقش تیبینی دارند (۵۰٪) و نقش تصاویر در فعال‌سازی تفکر فضایی و تصویری (۱۵٪) بسیار ضعیف است، در حالی که هندسه نیازمند تجسم و دستکاری ذهنی اشکال است. در جمع‌بندی، کتاب درسی هندسه ۲ در قالب فعلی، بیشتر بر تثبیت دانش همگرا و مهارت‌های پایه متمرکز است تا پرورش کامل خلاقیت، که این عدم توازن، جنبه‌های حیاتی "سیالیت" و "ابتکار" را که برای پیشرفت در علوم پیشرفته‌تر حیاتی هستند، به‌درستی تقویت نمی‌کند. اگرچه دقت و صحت علمی مفاهیم حفظ شده، اما کارایی کتاب در تولید متفکران خلاق و نوآور به چالش کشیده می‌شود؛ لذا کتاب مذکور یک ابزار انتقال دانش نسبتاً کارآمد است، اما یک بستر کامل برای پرورش خلاقیت محسوب نمی‌شود و تجدیدنظر اساسی در توزیع محتوایی به نفع مؤلفه‌های واگرا، انعطاف‌پذیر و مبتکرانه، برای همسویی با اهداف سند تحول بنیادین آموزش و پرورش و تأثیر مثبت بر نگرش دانش‌آموز به یادگیری در تمامی دروس، ضروری است. بر اساس یافته‌های مشروح در بالا، پیشنهادهای عملی و پژوهشی زیر برای بهره‌برداری مؤثرتر از پتانسیل‌های کتاب هندسه ۲ و ارتقای خلاقیت دانش‌آموزان ارائه می‌گردد: ۱. تهیه راهنمایی با تمرینات "برون‌قاعده‌ای" برای تقویت تفکر واگرا و انعطاف‌پذیری (مانند مسائل باز و پروژه‌های کوچک). ۲. حداقل ۴۰٪ از فعالیت‌ها باید دانش‌آموز را به ارائه‌ی چند پاسخ یا روش حل منحصر به فرد (آزادی ذهنی) تشویق کنند. ۳. جایگزینی نمودارهای ثابت با تصاویر پویا یا کدهای QR برای دسترسی به شبیه‌سازی‌های سه‌بعدی و مشاهده‌ی مفاهیم فضایی از زوایای مختلف. ۴. برگزاری دوره‌های تخصصی برای معلمان جهت اعتمادبه‌نفس در ارزشیابی فعالیت‌های غیر تک‌جوابی.

۵- مراجع

- [۱] احمدی، م. و جهانی، ج. (۱۴۰۴). رابطه خلاقیت مدیران و توسعه سازمانی در مدارس ابتدایی. نواندیشی در آموزش و یادگیری، ۲(۱)، ۱۱۴-۱۲۴.
- [۲] خارستانی، ا.ح. و خادمی، ن. (۱۴۰۳). بازتاب مؤلفه‌های نظریه خلاقیت گیلفورد در محتوای کتاب ریاضی دوم دبستان. سومین کنفرانس ملی تازه‌های روانشناسی تکاملی و تربیتی، بندرعباس. <https://civilica.com/doc/2126352>
- [۳] شریفی، ش.، شیخ احمدی، س.ع. و رستمی، ش. (۱۴۰۲). تاثیر معلم در ایجاد خلاقیت و نقش خلاقیت در پیشرفت دانش‌آموزان. همایش ملی پژوهش‌های مدیریت و علوم انسانی در ایران. <https://sid.ir/paper/fa1086104SID>
- [۴] شیروانی شیری، ع.، جمالی فرد، م.ر. و آزادی، ن. (۱۳۹۹). تحلیل محتوای کتاب ریاضی پنجم دبستان از منظر شاخص خلاقیت گیلفورد. پویا در آموزش علوم پایه، ۶(۲۱)، ۵۸-۶۷. <https://sid.ir/paper/fa382919SID>
- [۵] حسنی دیزجی، م. (۱۴۰۱). بررسی فرهنگ مدرسه با نحوه و میزان خلاقیت دانش‌آموزان. پژوهشنامه اورمزد، ۱۳(۵۹)، ۲۱۶-۲۲۷.
- [۶] نجفی مرغملکی، ر. و سعادت‌مند، ز. (۱۴۰۳). بررسی تاثیر به کارگیری برنامه درسی لگومحور بر خلاقیت دانش‌آموزان در مفاهیم ریاضی دوره اول ابتدایی (پایه دوم دبستان). رویکرد فلسفه در مدارس و سازمان‌ها، ۳(۱)، ۱۹-۲۹.
- [۷] یوسف‌زاده درزی، ف. (۱۴۰۳). بررسی میزان تاثیر محتوای کتاب هندسه ۲ (پایه ی دوازدهم) دوره ی دوم متوسطه بر اساس حیطه‌ی شناختی بلوم و شاخص خلاقیت گیلفورد. هشتمین کنفرانس بین‌المللی فیزیک، ریاضی و توسعه علوم پایه، تهران. <https://civilica.com/doc/2093609>



ششمین همایش ملی ریاضی و آمار

<https://conf.gonbad.ac.ir/msc1404>

- [۸] یوسفی، م.، ریحانی، ا. و بهزادی، م.ح. (۱۴۰۴). تاثیر آموزش مبتنی بر طرح مسأله‌ی بازپاسخ، بر خلاقیت ریاضی دانش آموزان پایه‌ی دهم مدارس استعدادهای درخشان. ابتکار و خلاقیت در علوم انسانی، ۱۵(۱)، ۱۲۱-۱۵۶.
- [۹] بابلی، ب.، بهمنی، ن. (۱۴۰۱). تحلیل محتوای کتاب هندسه یازدهم با روش ویلیام رومی. مقاله ارائه شده در دومین کنفرانس بین‌المللی پژوهش‌ها و دستاوردهای نو در علوم، مهندسی و فناوری‌های نوین. دریافت از: <https://civilica.com/doc/1515467>
- [۱۰] پورحسن، ع. و شیوخی، ع. (۱۳۹۵). بررسی مؤلفه‌های فعال محور کتاب جدیدالتألیف ریاضی نهم دوره اول متوسطه. مقاله ارائه شده در چهاردهمین کنفرانس آموزش ریاضی ایران، بوشهر.
- [۱۱] حرفتی‌سبحانی لیل آبادی، م. و پیری، م. (۱۳۹۶). تحلیل محتوای کتاب‌های تفکر و سبک زندگی دوره اول متوسطه برحسب میزان توجه به مؤلفه‌های سرمایه فرهنگی. فصلنامه مطالعات میان‌فرهنگی، سال ۱۲، شماره ۳۱، ص. ۱۱۷-۱۴۲.
- [۱۲] عظیم پور، س.، واحدی، ح. و منصوری، س. (۱۳۹۹). تحلیل محتوای کتاب هندسه ۱ پایه دهم رشته ریاضی و فیزیک بر اساس روش ویلیام رومی. پژوهش در آموزش علوم تجربی، ۶(۲۱)، ۳۸-۴۷.

[13]Kaufman, J. (2018). *Creativity as a stepping stone toward a brighter future. Journal of Intelligence, 6(2), 21.* <https://doi.org/10.3390/jintelligence6020021>.

انتقال‌های Q - نرم از زیرگروه‌های Q - نرمرسول رسولی^۱، سی‌به‌ر قادری^۲

^۱ عضو هیئت‌علمی گروه ریاضی، دانشگاه پیام نور، صندوق پستی ۳۶۹۷-۱۹۳۹۶، تهران، ایران؛ rasuli@pnu.ac.ir
^۲ عضو هیئت‌علمی گروه ریاضی، دانشگاه پیام نور، صندوق پستی ۳۶۹۷-۱۹۳۹۶، تهران، ایران؛ ghaderi_s@pnu.ac.ir
* نویسنده مسئول: سی‌به‌ر قادری

چکیده

در این مقاله ما مفاهیم جدیدی مانند انتقال‌های Q - نرم را روی زیرگروه‌های Q - نرم تعریف می‌کنیم خواص اساسی و بنیادی آن‌ها را مطرح می‌کنیم و قضایای مهمی را ثابت می‌کنیم. ثابت می‌کنیم هر انتقال Q - نرم از زیرگروه‌های Q - نرم همچنان یک زیرگروه Q - نرم است. در نهایت خواص اصلی آن‌ها را تحت هم‌ریختی‌ها و پادهم‌ریختی‌ها بیان می‌کنیم و نتایج مهم و کاربردی را ثابت خواهیم کرد.

کلمات کلیدی: زیرمجموعه‌های Q - نرم؛ نظریه گروه‌ها؛ زیرگروه‌های Q - نرم؛ زیرگروه‌های نرمال Q - نرم؛ انتقال‌های Q - نرم؛ هم‌ریختی‌ها.

۱- مقدمه

نظریه مجموعه‌های نرم^۱ تعمیمی از نظریه مجموعه‌های فازی^۲ می‌باشد. مفهوم مجموعه‌های نرم برای اولین توسط مولودتسو مطرح شد [۱۱]. بعد محققان زیادی روی مجموعه‌های نرم مفاهیمی جدیدی را عرضه کردند [۲۱ و ۱۰ و ۶ و ۲]. در سال ۲۰۱۳ سگمان و کاراتس مفهوم مجموعه‌های نرم فازی شهودی^۳ را بیان کردند و مجموعه‌های نرم را فازی کردند. سپس آکتاس و سگمان گروه‌های نرم را تعریف کردند و خصوصیات آن‌ها را بیان کردند [۱]. بعد از آن مجموعه‌های نرم روی حلقه‌ها بررسی شد [۳] و در ادامه فینگ و بقیه همکاران مفهوم نیم‌حلقه‌های نرم را بیان کردند [۸]. مؤلف اول این مقاله در کارهای قبلی خود [۲۰ - ۱۲] خصوصیات مجموعه‌های نرم را در مفاهیم جبر کلاسیک مطرح کرده‌است. در این مقاله مفهوم انتقال‌های Q - نرم^۴ از زیرگروه‌های Q - نرم^۵ را تعریف می‌کنیم و ارتباط آن‌ها را با زیرگروه‌های کلاسیک بیان می‌کنیم.

۲- پیش‌نیازها

در این قسمت تعاریف و قضایایی که در این مقاله لازم داریم را ذکر می‌کنیم و برای بررسی و بیان جریثات خوانندگان را به منابع اصلی ارجاع می‌دهیم [۱۸ و ۱۴ و ۱۳ و ۹ و ۵ و ۴]. در سراسر این مقاله Q یک مجموعه غیرتهی دلخواه و U یک مجموعه

1 Soft sets theory

2 Fuzzy Sets theory

3 Intuitionistic Fuzzy soft sets

4 Q-Soft Translations

5 Q-Soft Subgroups

ششمین همایش ملی ریاضی و آمار

<https://conf.gonbad.ac.ir/msc1404>

کل اولیه^۱ و E مجموعه‌ای از پارامترها^۲ و $P(U)$ مجموعه توانی از مجموعه U می‌باشد.

۱.۲- تعریف

فرض کنید A زیرمجموعه E باشد. تابع $f_{A \times Q}: E \times Q \rightarrow P(U)$ را یک زیرمجموعه Q - نرم روی U می‌گوییم بطوریکه اگر $x \notin A$ آنگاه $f_{A \times Q}(x, q) = \emptyset$ توجه شود که می‌توانیم زیرمجموعه Q - نرم روی U را به صورت

$$f_{A \times Q} = \left\{ \left((x, q), f_{A \times Q}(x, q) \right) : (x, q) \in E \times Q, f_{A \times Q}(x, q) \in P(U) \right\}$$

نشان دهیم. مجموعه تمامی مجموعه‌های Q - نرم روی U را با نماد $QS(U)$ نشان می‌دهیم و از این به بعد اشاره‌ای به مجموعه U نخواهیم کرد.

۲.۲- تعریف

فرض کنید $f_{A \times Q}$ و $f_{B \times Q} \in QS(U)$. در این صورت موارد زیر برقرار است:

(الف) اگر برای هر $(x, q) \in E \times Q$ همواره $f_{A \times Q}(x, q) = \emptyset$ آنگاه $f_{A \times Q}$ یک زیرمجموعه Q - نرم تهی است و با نماد $\emptyset_{A \times Q}$ نشان می‌دهیم.

(ب) اگر برای هر $(x, q) \in A \times Q$ همواره $f_{A \times Q}(x, q) = U$ آنگاه $f_{A \times Q}$ را یک مجموعه نرم $A \times Q$ - جهانی می‌گوییم و با نماد $f_{A \times Q}$ نشان می‌دهیم.

(ج) اگر $f_{A \times Q}(x, q) = U$ برای هر $(x, q) \in E \times Q$ برقرار باشد آنگاه می‌گوییم $f_{A \times Q}$ یک مجموعه Q - نرم جهانی است و با نماد $f_{E \times Q}$ نشان می‌دهیم.

(د) تصویر مجموعه $f_{A \times Q}$ را به صورت $Im(f_{A \times Q}) = \{f_{A \times Q}(x, q) : (x, q) \in A \times Q\}$ نشان می‌دهیم.

(ت) اگر برای هر $(x, q) \in E \times Q$ همواره $f_{A \times Q}(x, q) \subseteq f_{B \times Q}(x, q)$ برقرار باشد، آنگاه $f_{A \times Q}$ یک زیرمجموعه Q - نرم از $f_{B \times Q}$ است و با نماد $f_{A \times Q} \subseteq f_{B \times Q}$ نشان می‌دهیم.

(ح) می‌گوییم $f_{A \times Q} = f_{B \times Q}$ اگر برای هر $(x, q) \in E \times Q$ همواره $f_{A \times Q}(x, q) = f_{B \times Q}(x, q)$ برقرار باشد.

(خ) اجتماع $f_{A \times Q}$ و $f_{B \times Q}$ را با نماد $f_{A \times Q} \cup f_{B \times Q}$ نشان داده و برای هر $(x, q) \in E \times Q$ به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$(f_{A \times Q} \cup f_{B \times Q})(x, q) = f_{A \times Q}(x, q) \cup f_{B \times Q}(x, q)$$

(م) اشتراک $f_{A \times Q}$ و $f_{B \times Q}$ را با نماد $f_{A \times Q} \cap f_{B \times Q}$ نشان داده و برای هر $(x, q) \in E \times Q$ به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$(f_{A \times Q} \cap f_{B \times Q})(x, q) = f_{A \times Q}(x, q) \cap f_{B \times Q}(x, q)$$

۳.۲- تعریف

فرض کنید $\varphi: A \rightarrow B$ یک تابع باشد و $f_{A \times Q}$ و $f_{B \times Q} \in QS(U)$ تصویر نرم^۴ از $f_{A \times Q}$ تحت φ را به صورت

$$\varphi(f_{A \times Q})(y, q) = \begin{cases} U\{f_{A \times Q}(x, q) : (x, q) \in A \times Q, \varphi(x) = y\} & \text{اگر } \varphi^{-1}(y) \neq \emptyset \\ \emptyset & \text{اگر } \varphi^{-1}(y) = \emptyset \end{cases}$$

و پیش تصویر نرم^۵ از $f_{B \times Q}$ را به صورت $\varphi^{-1}(f_{B \times Q})(x, q) = f_{B \times Q}(\varphi(x), q)$ تعریف می‌کنیم.

¹ Initial Universe set

² Parameters

³ Q-Soft Subset

⁴ Soft image

⁵ Soft pre image

ششمین همایش ملی ریاضی و آمار

<https://conf.gonbad.ac.ir/msc1404>

۴.۲- تعریف

فرض کنید G و H دو گروه باشند و $f: G \rightarrow H$ یک تابع باشد. f یک همریختی^۱ است اگر $f(xy) = f(x)f(y)$ و f یک پادهمریختی^۲ است اگر $f(xy) = f(y)f(x)$ که در آن $x, y \in G$.

۵.۲- تعریف

فرض کنید G یک گروه و H زیرمجموعه غیرتهی از G باشد. در این صورت H زیرگروه G است اگر و فقط اگر $xy^{-1} \in H$ برای هر $x, y \in H$.

۶.۲- تعریف

فرض کنید G یک گروه و $f_{G \times Q} \in QS(U)$ می‌گوییم $f_{G \times Q}$ یک زیرگروه $-Q$ نرم^۳ روی U است اگر شرایط $f_{G \times Q}(xy, q) \supseteq f_{G \times Q}(x, q) \cap f_{G \times Q}(y, q)$ و $f_{G \times Q}(x^{-1}, q) \supseteq f_{G \times Q}(x, q)$ برای هر $x, y \in G$ و $q \in Q$ برقرار باشد. در سراسر این مقاله e_G عضو خنثی گروه G است. مجموعه تمامی زیرگروه‌های $-Q$ نرم از گروه G را با نماد $S_{G \times Q}(U)$ نشان می‌دهیم.

۷.۲- قضیه

$f_{G \times Q} \in S_{G \times Q}(U)$ اگر و فقط اگر $f_{G \times Q}(xy^{-1}, q) \supseteq f_{G \times Q}(x, q) \cap f_{G \times Q}(y, q)$ برای هر $x, y \in G$ و هر $q \in Q$.

۸.۲- تعریف

فرض کنید $f_{G \times Q} \in S_{G \times Q}(U)$ در این صورت می‌گوییم $f_{G \times Q}$ یک زیرگروه نرمال $-Q$ نرم^۴ از گروه G است اگر $f_{G \times Q}(xy, q) = f_{G \times Q}(yx, q)$ بطوریکه $x, y \in G$ و $q \in Q$. مجموعه تمامی زیرگروه‌های نرمال $-Q$ نرم از گروه G را با نماد $NS_{G \times Q}(U)$ نشان می‌دهیم.

۹.۲- مثال

فرض کنید $U = \{U_1, U_2, U_3\}$ و $(\mathbb{R}, +)$ یک گروه جمعی باشد. اگر $f_{\mathbb{R} \times Q}: \mathbb{R} \times Q \rightarrow P(U)$ را به صورت

$$f_{\mathbb{R} \times Q} \in NS_{\mathbb{R} \times Q}(U) \text{ در این صورت } f_{\mathbb{R} \times Q}(x, q) = \begin{cases} \{U_1, U_2\} & \text{اگر } x \in \mathbb{R}^{\geq 0} \\ \{U_3\} & \text{اگر } x \in \mathbb{R}^{< 0} \end{cases}$$

۳- نتایج اصلی

در این بخش نتایج اصلی مقاله را ذکر می‌کنیم.

¹ Homomorphism

² Anti Homomorphism

³ Q-Soft Subgroup

⁴ Q-Soft normal subgroup

ششمین همایش ملی ریاضی و آمار

<https://conf.gonbad.ac.ir/msc1404>

۱.۳- تعریف

فرض کنید $\alpha \in P(U), f_{G \times Q} \in QS(U)$ در این صورت می‌گوییم $T = T_\alpha^{f_{G \times Q}}: G \times Q \rightarrow P(U)$ یک انتقال Q -نرم از $f_{G \times Q}$ است اگر شرط $T(x, q) = f_{G \times Q}(x, q) \cup \alpha$ برای هر $x \in G, q \in Q$ و $\alpha \in P(U)$ برقرار باشد.

۲.۳- قضیه

فرض کنید T یک انتقال Q -نرم از یک زیرگروه Q -نرم $f_{G \times Q}$ از گروه G باشد. در این صورت $T(x^{-1}, q) = T(x, q)$ و $T(e, q) \supseteq T(x, q)$ برای هر $x \in G$ و $q \in Q$ برقرار می‌باشند.

۳.۳- قضیه

فرض کنید T یک انتقال Q -نرم از یک زیرگروه Q -نرم $f_{G \times Q}$ از گروه G باشد. اگر $T(xy^{-1}, q) = T(e, q)$ آنگاه $T(x, q) = T(y, q)$ برای هر $x, y \in G$ و $q \in Q$ برقرار می‌باشد.

۴.۳- قضیه

فرض کنید T یک انتقال Q -نرم از زیرگروه Q -نرم $f_{G \times Q}$ از گروه G باشد. در این صورت T یک زیرگروه Q -نرم از G خواهد بود.

۵.۳- قضیه

فرض کنید T یک انتقال Q -نرم از زیرگروه Q -نرم $f_{G \times Q}$ از گروه G باشد. در این صورت H یک زیرگروه G خواهد بود.

$$H = \{x \in G : T(x, q) = T(e, q)\}$$

۶.۳- قضیه

فرض کنید T یک انتقال Q -نرم از زیرگروه Q -نرم $f_{G \times Q}$ از گروه G باشد و $T(xy^{-1}, q) = M^*$ بطوریکه $\alpha \in P(U)$ و $\alpha \subset M^*$ در این صورت $T(x, q) = T(y, q)$ که $x, y \in G$ و $q \in Q$.

۷.۳- قضیه

فرض کنید $\varphi: G \rightarrow H$ یک همربختی بین گروه‌های G و H باشد. فرض کنید $f_{G \times Q} \in S_{G \times Q}(U)$ و $g_{H \times Q} \in S_{H \times Q}(U)$. در این صورت داریم:

(الف) اگر T یک انتقال Q -نرم از $f_{G \times Q}$ باشد و φ پوشا باشد آنگاه $\varphi(T) \in S_{H \times Q}(U)$.
 (ب) اگر T یک انتقال Q -نرم از $g_{H \times Q}$ باشد آنگاه $\varphi^{-1}(T) \in S_{G \times Q}(U)$.

۸.۳- قضیه

فرض کنید $\varphi: G \rightarrow H$ یک همربختی بین گروه‌های G و H باشد، $f_{G \times Q} \in NS_{G \times Q}(U)$ و $g_{H \times Q} \in NS_{H \times Q}(U)$.
 (الف) اگر T یک انتقال Q -نرم از $f_{G \times Q}$ باشد و φ پوشا باشد آنگاه $\varphi(T) \in NS_{H \times Q}(U)$.
 (ب) اگر T یک انتقال Q -نرم از $g_{H \times Q}$ باشد آنگاه $\varphi^{-1}(T) \in NS_{G \times Q}(U)$.



ششمین همایش ملی ریاضی و آمار

<https://conf.gonbad.ac.ir/msc1404>

۹.۳- نتیجه

فضایای ۷.۳ و ۹.۳ در مورد پادهمریختی φ هم صادق هستند.

۴- نتیجه گیری و مسأله باز

در این مقاله انتقال های Q -نرم از زیرگروه های Q -نرم را تعریف کردیم خواص اصلی و ارتباط آن ها را با زیرگروه های کلاسیک G بررسی کردیم. حال در ادامه راه می توان قضایای اصلی گروه ها (قضیه اول و دوم و سوم) را در مورد آن ها بحث کرد. می توانیم مرتبه آن ها را تعریف کنیم و در مورد متناهی بودن و قضایای سیلو نتایج جدید و مهمی را به دست آوریم، بررسی کنیم که در حالت کلی چه زمانی آن ها جابجایی و حتی غیر جابجایی می توانند باشند. در مورد حاصلضرب داخلی و خارجی آن ها چه می توان گفت و خلاصه تمامی مواردی که در مورد گروه های کلاسیک G مطرح است می توان در مورد آن ها هم بحث کرد و تمامی موارد فوق می تواند چندین مسأله باز برای علاقه مندان باشد.

۵- منابع

- [1] H. Aktas, N. Cagman, *Soft Sets and Soft Groups*, Information Sciences 177(13) (2007) 2726-2735.
- [2] M. I. Ali, F. Feng, X. Y. Lin, W. K. Min, M. Shabir, *On Some New Operations in Soft Set Theory*, Computers and Mathematics with Applications 57(9) (2008) 2621-2628.
- [3] A. O. Atagun, A. Sezing, *Soft Substructures of Rings, Fields and Modules*, Computers and Mathematics with Applications 61(3) (2011) 592-601.
- [4] N. Cagman, *Contributions to The Theory of Soft Sets*, Journal of New Results in Science 4 (2014) 33-41.
- [5] N. Cagman, F. Citak, H. Aktas, *Soft int-group and Its Application to Group Theory*, Neural Computing and Applications 21 (2012) 151-158.
- [6] N. Cagman, S. Enginoglu, *Soft Matrix Theory and Its Decision Making*, Computers and Mathematics with Applications 59 (2010) 3308 – 3314.
- [7] N. Cagman, S. Karatas, *Intuitionistic Fuzzy Soft Set Theory and Its Decision Making*, Journal of Intelligent and Fuzzy Systems 24(4) (2013) 829 – 836.
- [8] F. Feng, Y. B. Jun, X. Zhao, *Soft Semirings*, Computers and Mathematics with Applications 56 (2008) 2621 – 2628.
- [9] T. Hungerfos, *Algebra*, Graduate Texts in Mathematics. Springer (2003).
- [10] P. K. Maji, R. Biswas, A. R. Roy, *Soft Set Theory*, Computers and Mathematics with Application 45(4 -5) (2003) 555 – 562.
- [11] D. A. Molodtsov, *Soft Set Theory – First Results*, Computer and Mathematics With Applications 37(4) (1999) 19 – 31.
- [12] R. Rasuli, *Soft Lie Ideals and Anti Soft Lie Ideals*, The Journal of Fuzzy Mathematics Los Angeles 26(1) (2018) 193 – 202



ششمین همایش ملی ریاضی و آمار

<https://conf.gonbad.ac.ir/msc1404>

- [13] R. Rasuli, *Extension of Q -soft Ideals in Semigroups*, International Journal of Open Problems in Computer Science and Mathematics 10(2) (2017) 6 – 13.
- [14] R. Rasuli, *Q -Soft Normal Subgroups*, Journal of New Theory (26) (2-19) 13 – 22.
- [15] R. Rasuli, *Anti Q -Soft Normal Subgroups*, The Journal of Fuzzy Mathematics Lost Angles America, Vol 28, No 1 (2020), 237 – 248.
- [16] R. Rasuli, *Q -Soft R -submodules and their properties*, Caspian Journal of Mathematical Sciences (CJMS), 11(2) (2022), 430 – 438.
- [17] R. Rasuli, *Characterization of Q -Soft R -submodules over commutative rings*, The Second National Congress on Mathematics and Statistics Conbad Kavous University, Iran, Conbad Kavous, 2020.
- [18] R. Rasuli, *Anti Q -Soft translations of anti Q -Soft subgroups*, The Third national Conference on Managent and Fuzzy Systems, University of Eyvanekey, Iran, Eyvanekey, March 2021.
- [19] R. Rasuli, *Anti Soft Rings and Anti Soft Ideals in Rings*, The Fourth International Conference on Soft Computing(CSC), University of Guilan, Iran, Guilan, December 29 – 30, 2021.
- [20] R. Rasuli, *Q -Soft cosets, characteristic Q -Soft and Q -level subsets of Q -soft subgroups*, 7th International Congerence on Combinatots, Crutography, Computer Science and Computing held by Iran University of Science and Technology, Iran, Tehran, during November 16 – 17, 2022.
- [21] A. Sezgin, A. O. Atagin, *On Operations of Soft Sets*, Comp. Math. Appl., 61(2011) 1457-1467.



اثربخیزی نرم‌ها روی زیرفضاهای برداری فازی و زیر فضاهای دوبرداری فازی

رسول رسولی^۱، سی‌بهر قادری^۲، حسین نراقی^۳

^۱ عضو هیئت‌علمی گروه ریاضی، دانشگاه پیام نور، صندوق پستی ۳۶۹۷-۱۹۳۹۶، تهران، ایران؛ rasuli@pnu.ac.ir

^۲ عضو هیئت‌علمی گروه ریاضی، دانشگاه پیام نور، صندوق پستی ۳۶۹۷-۱۹۳۹۶، تهران، ایران؛ ghaderi_s@pnu.ac.ir

^۳ عضو هیئت‌علمی گروه ریاضی، دانشگاه پیام نور، صندوق پستی ۳۶۹۷-۱۹۳۹۶، تهران، ایران؛ h.naraghi56@gmail.com

* نویسنده مسئول: سی‌بهر قادری

چکیده

در این مقاله به کمک نرم‌ها (t-نرم‌ها) زیرفضاهای برداری فازی و زیرفضاهای دو برداری فازی را مطرح می‌کنیم. خواص آنها را بیان و ثابت می‌کنیم. اشتراک و جمع آنها را مورد بررسی قرار می‌دهیم. تبدیلات خطی روی آنها را اعمال می‌کنیم. مثال‌های متنوع از آنها را ذکر می‌کنیم. در نهایت قضایا و نتایج مهمی را به دست خواهیم آورد.

کلمات کلیدی: فضاهای برداری؛ فضاهای دو برداری؛ تبدیلات خطی؛ نرم‌ها، نظریه مجموعه‌های فازی و زیرفضاهای دو برداری فازی.

۱- مقدمه

در سال ۱۸۵۳ برای اولین بار مفهوم بردار و دوبرداری توسط هامیلتون (Hamilton) مطرح شد [1]. نظریه مجموعه‌های فازی برای اولین بار توسط زاده (Zadeh) در سال ۱۹۶۵ مطرح گردید [2]. t-نرم‌ها (t-norms) در واقع تعمیم‌یافته مفهوم اشتراک در شبکه (Lattice) و ترکیب عطفی (Conjunction) در منطق هستند. مؤلف اول این مقاله به کمک نرم‌ها، تعاریف جدیدی از مفاهیم جبر کلاسیک را ارائه داده‌اند و اثر نرم‌ها را روی مفاهیم جبر فازی اعمال کرده‌اند و این مقاله در راستای همان کارهای قبلی است، [۳-۱۲]. در این مقاله ما سعی می‌کنیم t-نرم‌ها را روی زیر فضای برداری فازی و زیرفضای دو برداری فازی (Fuzzy bivector subspace) اعمال کنیم و تعاریف جدیدی را ارائه دهیم. سپس ارتباط آنها را با مفاهیم زیرفضاهای برداری بیان خواهیم کرد. تبدیلات خطی روی آنها اعمال می‌کنیم و قضایای بسیار مهمی را به دست می‌آوریم.

۲- پیش‌نیازها

در این قسمت تعاریف و قضایایی که در این مقاله لازم داریم را ذکر می‌کنیم و برای بیان جزئیات بیشتر، خوانندگان را به منابع [۲۳-13] ارجاع می‌دهیم. در این مقاله منظورمان از Z مجموعه اعداد صحیح و R مجموعه اعداد حقیقی و Q مجموعه اعداد گویا می‌باشد.

۱.۲- تعریف

فرض کنید $X \neq \emptyset$ مجموعه‌ای دلخواه باشد. $[0, 1]$ را $X \rightarrow [0, 1]$ مجموعه فازی روی X گوئیم و مجموعه آنها را با $[0, 1]^X$ نشان می‌دهیم.

ششمین همایش ملی ریاضی و آمار

<https://conf.gonbad.ac.ir/msc1404>

۲.۲- تعریف

تابع $T: [0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1]$ را یک t -نرم می‌گوییم اگر برای هر $x, y, z \in [0,1]$ شرایط زیر برقرار باشند:

(الف) $T(x,1)=x$ (ب) اگر $y \subseteq z$ آنگاه $T(x,y) \leq T(x,z)$ (ج) $T(x,y) = T(x,y)$ (د) $T(x, T(y,z)) = T(T(x,y), z)$
 یادآوری می‌کنیم T خود توان است اگر برای هر $x \in [0,1]$ همواره $T(x,x) = x$ برقرار باشد.

۲.۳- لم

فرض کنید T یک t -نرم باشد در این صورت $T(T(x,y), T(w,z)) = T(T(x,w), T(y,z))$ برای هر $x, y, w, z \in [0,1]$ برقرار است.

۲.۴- تعریف

فرض کنید $\mu_1, \mu_2: X \rightarrow [0,1]$ دو مجموعه فازی باشند اشتراک آنها متناسب با t -نرم T را با $\mu_1 \cap \mu_2: X \rightarrow [0,1]$ با ضابطه‌ی

$$(\mu_1 \cap \mu_2)(x) = T(\mu_1(x), \mu_2(x)) \quad x \in X$$

۲.۵- تعریف

فرض کنید $f: V \rightarrow W$ یک تبدیل خطی و $\mu \in [0,1]^V, v \in [0,1]^W$ در این صورت $f(\mu): W \rightarrow [0,1]$ و $f^{-1}(v): V \rightarrow [0,1]$ را به صورت $f(\mu)(y) = \sup\{\mu(x): f(x) = y\}$ و $f^{-1}(v)(x) = v(f(x))$ تعریف می‌کنیم.

۲.۶- تعریف

فرض کنید $\mu_1: X_1 \rightarrow [0,1], \mu_2: X_2 \rightarrow [0,1]$ دو مجموعه فازی باشند. اجتماع آنها $\mu_1 \cup \mu_2: X_1 \cup X_2 \rightarrow [0,1]$ را به صورت

$$(\mu_1 \cup \mu_2)(x) = \begin{cases} \max\{\mu_1(x), \mu_2(x)\} & \text{اگر } x \in X_1 \cap X_2 \\ \mu_1(x) & \text{اگر } x \in X_1 - X_2 \\ \mu_2(x) & \text{اگر } x \in X_2 - X_1 \end{cases}$$

۲.۷- تعریف

فرض کنید V_1, V_2 هر دو S -فضای برداری باشند بطوریکه $V_1 \not\subseteq V_2$ و $V_2 \not\subseteq V_1$ و $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ یا حتی $V_1 \cap V_2 \neq \emptyset$

حال فرض کنید $V = V_1 \cup V_2$ در این صورت می‌گوییم V یک فضای دوبرداری روی S است.

۲.۸- تعریف

فرض کنید $V = V_1 \cup V_2$ یک فضای دوبرداری روی مجموعه S باشد. فرض کنید $W = W_1 \cup W_2$ بطوریکه $W_1 \subset V_1$ و $W_2 \subset V_2$

و $W_1 \cap W_2 = \emptyset$. حال اگر W یک فضای دوبرداری روی S باشد آنگاه می‌گوییم W یک زیرفضای دو برداری از V روی S است.

ششمین همایش ملی ریاضی و آمار

<https://conf.gonbad.ac.ir/msc1404>

۳- نتایج اصلی

۱.۳- تعریف

تابع $K: F \rightarrow [0,1]$ را یک زیرمیدان فازی متناسب با t -نرم T می‌گوییم اگر برای $c, d \in F$ و $d \neq 0$ داشته باشیم:

$$\text{الف) } K(1) = 1 \quad \text{ب) } K(c-d) \geq T(K(c), K(d)) \quad \text{ج) } K(cd^{-1}) \geq T(K(c), K(d))$$

۲.۳- تعریف

فرض کنید $K: F \rightarrow [0,1]$ یک مجموعه فازی باشد و $A: V \rightarrow [0,1]$ که

$$\text{الف) } A(0) > 0 \quad \text{ب) } A(x-y) \geq T(A(x), A(y)) \quad \text{ج) } A(cx) \geq T(K(c), A(x))$$

بطوریکه $c \in F$ و $x, y \in V$ در این صورت A را یک زیرفضای برداری فازی روی K متناسب با t -نرم T می‌گوییم و مجموعه تمامی آنها را با $FST(V)$ نشان می‌دهیم.

۳.۳- قضیه

فرض کنید $\mu \in FST(V)$ در این صورت $B = \{x \in V: \mu(x) = 1\}$ یک زیرفضای برداری از V است. این قضیه ارتباط $FST(V)$ و زیرفضای برداری V را نشان می‌دهد.

۴.۳- قضیه

فرض کنید $\mu \in FST(V)$ و T یک t -نرم خودتوان باشد اگر برای هر $c \in F$ شرط $K(c) \geq t$ که $t \in [0,1]$ برقرار باشد در این صورت $\mu^t = \{x \in V: \mu(x) \geq t\}$ یک زیرفضای برداری از V خواهد بود.

۵.۳- قضیه

در این قضیه برعکس قضایای قبلی را هم مطرح می‌کنیم. فرض کنید V یک F -فضای برداری باشد و W یک زیرمجموعه V باشد. فرض

$$\text{کنید } \mu: W \rightarrow [0,1] \text{ که } \mu(x) = \begin{cases} 1 & \text{اگر } x \in W \\ 0 & \text{اگر } x \notin W \end{cases}$$

صورت $\mu \in FST(V)$ اگر و فقط اگر W زیرفضای برداری V است.

۶.۳- قضیه

فرض کنید V یک F -فضای برداری و W زیرفضای برداری V است و $A: V \rightarrow [0,1]$ یک فضای برداری فازی متناسب با t -نرم T از

$$\widehat{A}(x+w) = \begin{cases} 1 & \text{اگر } x \in W \\ T(A(x), A(y)) & \text{اگر } x \neq y, x \in V, y \in W \end{cases}$$

که $\widehat{A}: \frac{V}{W} \rightarrow [0,1]$ باشد. در این صورت $K: F \rightarrow [0,1]$

بردارای خارج قسمتی فازی می‌گوییم.

ششمین همایش ملی ریاضی و آمار

<https://conf.gonbad.ac.ir/msc1404>

۷.۳- قضیه

فرض کنید $A \in FST(V)$ و T یک t -نرم خودتوان باشد. در این صورت $\hat{A} \in FST(\frac{V}{W})$

۸.۳- قضیه

فرض کنید $\mu_1, \mu_2 \in FST(V)$ و T یک t -نرم خودتوان باشد. در این صورت $\mu_1 \cap \mu_2 \in FST(V)$.

توجه شود که این قضیه برای هر تعداد دلخواه از اعضای $FST(V)$ برقرار است.

۹.۳- تعریف

می‌خواهیم جمع (sum) اعضای $FST(V)$ را تعریف کنیم. فرض کنید $\mu_1, \mu_2 \in FST(V)$ در این صورت جمع آنها را با

$$(\mu_1 + \mu_2)(x) = \sup\{T(\mu_1(y), \mu_2(z)) : x = y + z\}$$

۱۰.۳- قضیه

فرض کنید $\mu_1, \mu_2 \in FST(V)$ و T یک t -نرم خودتوان باشد. آنگاه $\mu_1 + \mu_2 \in FST(V)$.

۱۱.۳- قضیه

فرض کنید $f: V \rightarrow W$ یک تبدیل خطی باشد. اگر f پوشا باشد و $\mu \in FST(V)$ آنگاه $f(\mu) \in FST(W)$ و اگر $v \in FST(W)$ آنگاه $f^{-1}(v) \in FST(V)$.

۱۲.۳- تعریف

فرض کنید $V = V_1 \cup V_2$ یک فضای دوبرداری روی میدان F باشد و $\mu: V \rightarrow [0, 1]$ تابعی فازی باشد. می‌گوییم $\mu \in FST(V)$ اگر و فقط اگر $\mu_1: V_1 \rightarrow [0, 1]$ و $\mu_2: V_2 \rightarrow [0, 1]$ موجود باشند بطوریکه $\mu_1 \in FST(V_1)$ ، $\mu_2 \in FST(V_2)$ و $\mu = \mu_1 \cup \mu_2$.

۱۳.۳- تعریف

فرض کنید V یک فضای برداری باشد و $\mu: V \rightarrow [0, 1]$ یک مجموعه فازی دلخواه باشد. می‌گوییم μ یک زیرفضای دوبرداری فازی روی V است اگر زیرفضاهای برداری فازی $\mu_1, \mu_2: V \rightarrow [0, 1]$ موجود باشند که $\mu = \mu_1 \cup \mu_2$ ، $\mu \neq \mu_1$ ، $\mu \neq \mu_2$. بنابراین زمانی که μ زیرفضای دوبرداری فازی باشد و λ زیرفضای برداری فازی μ باشد منظور آن است که $\lambda \subseteq \mu$ و λ خودش هم زیرفضای دوبرداری فازی خواهد بود.

۱۴.۳- قضیه

فرض کنید $\mu_1 \in FST(V)$ ، $\mu_2 \in FST(V)$ و $t \in [0, \min\{\mu_1(\cdot), \mu_2(\cdot)\}]$ و همچنین $\mu = \mu_1 \cup \mu_2$ که μ هم یک زیرفضای دوبرداری فازی متناسب با t -نرم T باشد در این صورت $\mu^t = \mu_1^t \cup \mu_2^t$.

ششمین همایش ملی ریاضی و آمار

<https://conf.gonbad.ac.ir/msc1404>

۱۵.۳- قضیه

فرض کنید $\mu \in FST(V)$ بطوریکه مرتبه μ که با $O(\text{Im}(\mu))$ نشان می‌دهیم به صورت $0 \leq \text{Im}(\mu) < \infty$ می‌باشد. در این صورت $\mu_1, \mu_2 \in FST(V)$ وجود دارند که $\mu_1 \neq \mu_2$ و $\mu_1 \neq \mu_2$ و $\mu = \mu_1 \cup \mu_2$.

۱۶.۳- قضیه

این قضیه ارتباط بین فضای برداری V و فضای دوبرداری V را بیان می‌کند. فرض کنید V یک فضای برداری روی میدان F باشد و $\mu: V \rightarrow [0,1]$ یک مجموعه فازی دلخواه باشد بطوریکه $0 \leq \text{Im}(\mu) < \infty$. در این صورت $\mu \in FST(V)$ یک زیرفضای برداری است(اگر و فقط اگر $\mu \in FST(V)$ یک زیرفضای دو برداری است).

۴- نتیجه‌گیری و مسأله باز

در این مقاله به کمک t -نرم‌ها مفاهیمی مانند زیرفضای برداری فازی و زیرفضای دوبرداری فازی را بررسی کردیم بسیاری از خصوصیات آنها را ثابت کردیم. حال در ادامه می‌توان بحث‌هایی مانند اسپین (spanning) و استقلال خطی و پایه را مطرح کرد و همچنین بعد آنها محاسبه کنید. تمامی موارد فوق می‌تواند به عنوان یک مسأله باز برای علاقه‌مندان باشد.

۵- مراجع

- [1] W. R. Hamilton, "On the geometrical interpretation of some results obtained by calculation with biquaternions", *Proceedings of the Royal Irish Academy*, 5(1853), 388-390.
- [2] L. A. Zadeh, "Fuzzy sets", *Inform. Control*, 8(1965), 338-353.
- [3] R. Rasuli, "T-norms over complex fuzzy subgroups", *Mathematical Analysis and its Contemporary Applications*, 5(1)(2023), 33-49.
- [4] R. Rasuli, "Fuzzy ideals of BCI-algebras with respect to t-norm", *Mathematical Analysis and its Contemporary Applications*, 5(5)(2023), 39-50.
- [5] R. Rasuli, "Intuitionistic fuzzy complex subgroups with respect to norms (T and S)", *Journal of Fuzzy Extention and Application*, 4(2)(2023), 92-114.
- [6] R. Rasuli, "Normality and translation of IFS($G \times Q$) under norms", *Notes on Intuitionistic Fuzzy Sets*, 29(2)(2023), 114-132.
- [7] R. Rasuli, "Normalization, commutativity and centralization of TFMS(G)", *Journal of Discrete Mathematical Sciences & Cryptography*, 26(4)(2023), 1027-1050.
- [8] R. Rasuli, "Complex fuzzy lie subalgebras and complex fuzzy ideals under t-norms", *Journal of Fuzzy Extention and Application*, 4(3)(2023), 173-187.
- [9] R. Rasuli, "Complex intuitionistic fuzzy Lie subalgebras under norms", *Notes on Intuitionistic Fuzzy Sets*, 31(1)(20025), 15-28.
- [10] R. Rasuli and S. Ghaderi, "Fuzzy ideals and commutative fuzzy ideals of BCH—algebra according to t-norms", *Kronika journal*, 25(8)(2025), 24-39.
- [11] R. Rasuli, A. Shomali and H. Naraghi, "(M,N)-fuzzy subrings with respect to a t-norm T", *11th National Mathematics Conference of Payame Noor university*, 16-17 October, 2024, Yazd, Iran.
- [12] R. Rasuli, A. Shomali and H. Naraghi, "Q-intuitionistic fuzzy (subrings and ideals) according to norms", *11th National Mathematics Conference of Payame Noor university*, 16-17 October, 2024, Yazd, Iran.
- [13] W. B. Vasantha Kandasamy, "Smarandache bialgebraic structures", *American Research Press, Rehoboth, NM*, 2003.
- [14] A. El Allaoui, S. Melliani and L. S. Chadli, "Fuzzy dynamical systems and Invariant attractor sets for fuzzy strongly continuous semigroups", *Journal of Fuzzy Set Valued Analysis*, 2 (2016), 148-155. <https://doi.org/10.5899/2016/jfsva-00294>



ششمین همایش ملی ریاضی و آمار

<https://conf.gonbad.ac.ir/msc1404>

- [15] A. El. Allaoui, S. Melliani and L. S. Chadli, "Fuzzy α -semigroups of operators", *General Letters in Mathematics*, 2(2017), 42-49. <https://doi.org/10.5899/glm2016.2.2>.
- [16] K. Enneth Hoffman and R. Kunze, "Linear Algebra, Prentice-Hall", Inc. , *Englewood Cliffs*, New Jersey 1961.
- [17] D. S. Malik and J. N. Mordeson, "Fuzzy subfields", *Fuzzy Sets and Systems*, 37(1990), 383-388. [https://doi.org/10.1016/0165-0114\(90\)90034-4](https://doi.org/10.1016/0165-0114(90)90034-4)
- [18] D. S. Malik and J. N. Mordeson, "Fuzzy Maximal, Radical and Primary Ideals of a Ring", *Inform. Sci.*, 53(1991), 237-250. [https://doi.org/10.1016/0020-0255\(91\)90038-v](https://doi.org/10.1016/0020-0255(91)90038-v)
- [19] D. S. Malik and H. N. Mordeson, "Fuzzy Commutative Algebra", *World Science publishing Co.Pte.Ltd.*, (1995). <https://doi.org/10.1142/9789912915897>
- [20] S. Melliani, A. El Allaoui and L.S.Chadli, "Relation Between Fuzzy Semigroups and Fuzzy Dynamical Systems", *Nonlinear Dynamics and Systems Theory*, 17(2017), 60-69.
- [21] J. N. Mordeson, "Bases of Fuzzy Vector Spaces", *Inform. Sci.*, 67(1993), 87-92. [https://doi.org/10.1016/0020-0255\(93\)90085-z](https://doi.org/10.1016/0020-0255(93)90085-z)
- [22] S. Nanda, "Fuzzy algebras over fuzzy fields", *Fuzzy Sets and Systems*, 37(1990), 99-103. [https://doi.org/10.1016.0165-0114\(90\)90067-g](https://doi.org/10.1016.0165-0114(90)90067-g)
- [23] S. G. Pushkov, "Fuzzy modules with respect to a t-norm and some of their properties", *Journal of Mathematical Sciences*, 154(2008), 374-378. <https://doi.org/10.1007/s10958-008-9175-3>.



ششمین همایش ملی ریاضی و آمار

<https://conf.gonbad.ac.ir/msc1404>

F-243، صص ۶۹-۷۴.

**بررسی راهکارهایی جهت بهبود نگرش دانشجویان نسبت به درس ریاضی:
مطالعه موردی دانشگاه ملی مهارت- آموزشکده دختران بیرجند**

فاطمه راشدی

استادیار، دانشگاه ملی مهارت، تهران، ایران؛ frashedi@tvu.ac.ir

چکیده

هدف از این پژوهش بررسی تأثیر دو راهکار آموزشی، یعنی ارائه راه‌حل‌های چندگانه برای مسائل ریاضی و آموزش یادگیری خودتنظیمی، بر خودکارآمدی و رضایت از زندگی دانشجویان در درس ریاضی بود. این مطالعه از نوع نیمه‌آزمایشی و با طرح پیش‌آزمون-پس‌آزمون انجام شد. جامعه آماری شامل دانشجویان دانشگاه ملی مهارت مرکز دختران بیرجند بود که به روش نمونه‌گیری تصادفی چندمرحله‌ای انتخاب شدند. شرکت‌کنندگان در دو گروه آزمایشی قرار گرفتند: گروه اول تحت آموزش مبتنی بر ارائه راه‌حل‌های چندگانه و گروه دوم تحت آموزش یادگیری خودتنظیمی قرار گرفتند. داده‌ها با استفاده از آزمون تحلیل کوواریانس یک‌متغیره تحلیل شد.

کلمات کلیدی: آموزش ریاضی، نگرش نسبت به ریاضی، راه‌حل‌های چندگانه، آموزش یادگیری خودتنظیمی

۱- مقدمه

در حال حاضر، فرآیند جهانی شدن و تغییرات مرتبط با آن، انتظارات زیادی را نسبت به برنامه‌های آموزشی ایجاد کرده است. در این زمینه، توجه ویژه‌ای به درس ریاضی شده است. امروزه دانشگاه‌ها با ایفای نقش فعال‌تر، مأموریت‌های نوینی را بر عهده گرفته‌اند [۱]. چنانچه نقش اعضای هیأت علمی دانشگاه را در سه محور اصلی آموزش، پژوهش و ارائه خدمات اجتماعی و مشاوره‌ای مورد بررسی قرار دهیم، به‌روشنی مشخص است که در بخش آموزش، ارتقای فرآیند یادگیری از نظر کمی و کیفی همواره مدنظر بوده و مورد توجه جدی قرار گرفته است [۲]. با ارتقای قابلیت‌های ارتباطی یادگیرندگان، نقش مهمی در تسهیل فرآیند یادگیری ایفا می‌کند. از این دیدگاه، آموزش به معنای خلق معنا در ذهن دانشجو است، نه صرفاً انتقال آن. در این رویکرد، به جای پایبندی به مراحل خاص، بر اصولی کلی مانند تشویق به مالکیت فرآیند یادگیری، استفاده از روش‌های متنوع یادگیری و تقدیر از دیدگاه‌های مختلف تأکید می‌شود [۳]. پژوهشگران رویکرد را فرصتی ویژه برای تقویت خلاقیت ریاضی و درک عمیق‌تر دانشجویان از مفاهیم ریاضی می‌دانند و آن را نه تنها به‌عنوان ابزاری آموزشی، بلکه به‌عنوان ابزاری پژوهشی معرفی کرده‌اند که قابلیت خاصی در ارزیابی دانش ریاضی دانشجویان دارد [۴]. به عقیده مونتگو، موفقیت در حل مسائل ریاضی نه تنها مستلزم فراگیری اصول و مفاهیم ریاضی است، بلکه نیازمند مجهز بودن به راهبردهای خودتنظیمی می‌باشد [۵]. به باور پینتریچ، یادگیری خودتنظیم‌شده، فرآیندی فعال و سازنده است که طی آن یادگیرندگان به‌طور مستمر به پیش، تعدیل و هدایت فعالیت‌های شناختی، انگیزشی و رفتاری خود می‌پردازند [۶]. براساس یافته‌های پژوهشی، دانشجویانی که از کارآمدی خود اطمینان دارند، به کارگیری روش‌های شناختی و فراشناختی را افزایش داده و در انجام تکالیف خود، کوشش مضاعفی به خرج می‌دهند [۷]. مطالعات متعددی حاکی از آن است که موفقیت تحصیلی به‌طور قابل توجهی با سطح خودکارآمدی، استفاده از استراتژی‌های یادگیری عمیق و معنادار، و مهارت‌های خودتنظیمی همراه است [۸]. نتایج این مطالعه حاکی از آن بود که مشکلات تحصیلی برخی از دانش‌آموزان به دلیل عدم به کارگیری راهبردهای خودتنظیمی به وجود می‌آید. با توجه به این که بخش قابل

ششمین همایش ملی ریاضی و آمار

<https://conf.gonbad.ac.ir/msc1404>

توجهی از مشکلات دانشجویان دارای ناتوانی در ریاضیات به فقدان مهارت در به کارگیری راهبردهای فراشناختی و خودتنظیمی بازمی‌گردد و همچنین آموزش مبتنی بر گفتمان و ارائه راه‌حل‌های چندگانه برای مسائل ریاضی می‌تواند نگرش مثبت‌تری در دانشجویان ایجاد کند، انجام این پژوهش از اهمیت بالایی برخوردار است. هدف این مقاله بررسی تأثیر دو راهکار ۱- ارائه راه‌حل‌های چندگانه برای مسائل ریاضی و ۲- آموزش یادگیری خودتنظیمی، بر خودکارآمدی و رضایت از زندگی دانشجویان دانشگاه ملی مهارت در رابطه با درس ریاضی، بررسی شده است.

۲- روش تحقیق

این پژوهش از نوع نیمه‌آزمایشی و به صورت پیش‌آزمون و پس‌آزمون اجرا شده است. جامعه آماری شامل کلیه دانشجویان دانشگاه ملی مهارت مرکز دختران بیرجند در سال تحصیلی ۱۴۰۳-۱۴۰۴ می‌باشد. نمونه‌گیری به روش تصادفی چندمرحله‌ای انجام شد.

- **آزمون ریاضی کی مت**: آزمون ریاضی کیمت توسط کرنولی، ناچی‌من و پریچت هنجاریابی شده است و به منظور شناسایی نقاط قوت و ضعف دانشجویان در حوزه‌های مختلف ریاضی به کار می‌رود [۱۱].
- **پرسش‌نامه خودکارآمدی نوجوانان**: این پرسش‌نامه توسط موریس برای ارزیابی خودکارآمدی نوجوانان طراحی شده است، شامل سه زیرمقیاس در سه حوزه‌ی خودکارآمدی اجتماعی، تحصیلی و هیجانی است [۱۲].
- **پرسش‌نامه رضایت از زندگی**: مقیاس رضایت از زندگی که توسط داینر و همکاران طراحی شده است، شامل پنج آیتم است که شرکت‌کنندگان بر اساس یک مقیاس ۷ درجه‌ای به آن پاسخ می‌دهند [۱۳].
- **آموزش خودتنظیمی**: این برنامه بر پایه مدل خودتنظیمی پینتریچ استوار است. مدل پینتریچ در پژوهش [۱۴] مورد استفاده قرار گرفته است. فرآیند آموزشی طی ۸ جلسه برگزار شد که جزئیات آن در جدول (۱) ذکر شده است.

جدول ۱: مراحل آموزش خودتنظیمی

عنوان	جلسه
برقراری ارتباط	جلسه ۱
انگیزش و علاقه	جلسه ۲
آشنایی با تعیین هدف مطالعه و آشنایی با راهبرد تمرکز و توجه	جلسه ۳
برنامه ریزی	جلسه ۴
آشنایی با راهبرد تکرار و مرور	جلسه ۵
آشنایی با راهبرد بسط و گسترش معنایی	جلسه ۶
آشنایی با راهبرد سازماندهی	جلسه ۷
آشنایی با راهبرد خودتنظیمی و مرور مطالب گذشته	جلسه ۸

۳- یافته‌ها

در این پژوهش تلاش شد تا اثربخشی آموزش با تأکید بر ارائه راه‌حل‌های چندگانه در بهبود نگرش دانشجویان نسبت به درس ریاضی بررسی شود و تأثیر مثبت این رویکرد بر نگرش دانشجویانی با سطوح توانایی متفاوت در ریاضیات ارزیابی گردد. علاوه بر این تأثیر آموزش خودتنظیمی بر خودکارآمدی و رضایت از زندگی در دانشجویان درس ریاضی، مورد بررسی قرار گرفته است. نتایج به دست آمده از شاخص‌های توصیفی گروه در دو مرحله قبل و بعد از آموزش (جدول ۲) نشان می‌دهد که تمامی مؤلفه‌های نگرش به صورت مثبت بهبود یافته‌اند؛ به طوری که میانگین مؤلفه‌های سودمندی ریاضیات، خودپنداره و لذت از ریاضی

ششمین همایش ملی ریاضی و آمار

<https://conf.gonbad.ac.ir/msc1404>

افزایش یافته و احساس ناتوانی کاهش یافته است.

جدول ۲: آماره های توصیفی مؤلفه های انگیزش در پیش آزمون و پس آزمون

دانشجویان گروه ۱ درس ریاضی (۴۷ نفر)		گروه	
متغیر	منبع تغییر	میانگین	انحراف استاندارد
سودمندی ریاضی	پیش آزمون	۷,۸۲	۱,۹۲
	پس آزمون	۱۵,۶۸	۱,۵۷
خود پنداره ریاضی	پیش آزمون	۸,۷۵	۲,۳۱
	پس آزمون	۱۷	۱,۹۶
احساس ناتوانی	پیش آزمون	۴۶,۶۰	۷,۶۰
	پس آزمون	۲۳,۸۵	۶,۶۶
لذت ریاضی	پیش آزمون	۲۱,۷۰	۵,۸۰
	پس آزمون	۵۲,۲۰	۵,۸۶

جدول ۳: نتایج تحلیل کوواریانس برای مؤلفه های انگیزش در دانشجویان

متغیر	منبع تغییر	SS	DF	MS	F	P	η^2
سودمندی ریاضی	پیش آزمون	۸,۰۴	۱	۸,۰۴	۳,۸۵	۰,۱۰	۰,۰۸
	پس آزمون	۱۱۷۲,۸	۱	۱۱۷۴,۸	۱۲۸,۶	۰,۰۲	۰,۸۲
	خطا	۴۱۳,۳۱	۴۶	۹,۲۰	۶		
خود پنداره ریاضی	پیش آزمون	۰,۸۰	۱	۰,۸۰	۰,۴۲	۰,۴۵	۰,۰۰۱
	پس آزمون	۱۳۴۶,۵	۱	۱۳۴۶,۵	۳۴۵,۰	۰,۰۰۱	۰,۷۶
	خطا	۳۰۱,۷۵	۴۶	۶,۰۳	۷		
احساس ناتوانی	پیش آزمون	۶,۲۰	۱	۶,۲۰	۰,۱۶	۰,۷۲	۰,۰۰۱
	پس آزمون	۸۲۰,۱۰	۱	۸۲۰,۱۰	۸۲,۵۲	۰,۰۰۱	۰,۵۷
	خطا	۴۵۸۱,۲	۴۶	۸۹,۲۸	۳		
لذت ریاضی	پیش آزمون	۰,۰۹	۱	۰,۰۹	۰,۰۱	۰,۸۶	۰,۰۰۱
	پس آزمون	۱۵۴۰,۵	۱	۱۵۴۰,۵	۳۱۰,۷۵	۰,۰۰۱	۰,۷۳
	خطا	۱۵۴۰,۵	۴۶	۳۱۰,۷	۳۱۰,۷۵		



ششمین همایش ملی ریاضی و آمار

<https://conf.gonbad.ac.ir/msc1404>

			۴۶	۲۶۲۷,۸	خطا
				۹	

نتایج جدول ۳ نشان می‌دهد که میانگین مؤلفه‌های سودمندی، خودپنداره و لذت از ریاضی پس از آموزش در مقایسه با پیش‌آزمون به‌طور قابل توجهی افزایش یافته است، در حالی که میانگین احساس ناتوانی کاهش یافته است. در جدول ۴، میانگین و انحراف استاندارد نمرات متغیرهای مربوط به آموزش مبتنی بر یادگیری خودتنظیمی در زمینه خودکارآمدی و رضایت از زندگی دانشجویان، در مراحل پیش‌آزمون و پس‌آزمون برای گروه ۲ ارائه شده است.

جدول ۴: جدول میانگین و انحراف استاندارد نمرات متغیرهای مربوط به آموزش مبتنی بر یادگیری خودتنظیمی

گروه	دانشجویان گروه ۲ درس ریاضی (۴۰ نفر)	میانگین	انحراف استاندارد	متغیر	مؤلفه های روش آموزش یادگیری خودتنظیمی
پیش آزمون	۲۲,۹	۳,۹۳	تحصیلی	خودکارآمدی	
پس آزمون	۳۱,۵	۲,۸۸	اجتماعی		
پیش آزمون	۲۲,۸	۴,۹۳	هیجانی		
پس آزمون	۳۰,۸۶	۳,۱۴			
پیش آزمون	۲۲,۰۵	۴,۵۹		رضایت از زندگی	
پیش آزمون	۲۸,۱۵	۳,۱۹			
پیش آزمون	۲۲,۷	۷,۲۵			
پیش آزمون	۲۹,۵۵	۴,۷۵			

طبق نتایج جدول ۵، تحلیل کوواریانس با کنترل نمرات پیش‌آزمون نشان می‌دهد که تفاوت میانگین‌های خودکارآمدی تحصیلی، خودکارآمدی هیجانی و رضایت از زندگی بین دو گروه از لحاظ آماری معنادار بوده است.

جدول ۵: نتایج تحلیل کوواریانس برای خودکارآمدی و رضایت از زندگی در دانشجویان

متغیر	مؤلفه	منبع تغییر	SS	DF	MS	F	P	η^2
خودکارآمدی	تحصیلی	پیش آزمون	۳۲,۸۰	۱	۳۲,۸۰	۲,۶۴	۰,۱۲	۰,۰۷
		پس آزمون	۲۶۱,۲۸	۱	۲۶۱,۲۸	۲,۶۴	۰,۰۰	۰,۱۴



ششمین همایش ملی ریاضی و آمار

<https://conf.gonbad.ac.ir/msc1404>

آزمون						
خطا	۱۳,۴۵	۳۷	۴۶۱,۵۵			
پیش آزمون	۰,۰۰۱	۰,۸۸	۰,۰۲	۰,۲۴	۱	۰,۲۴
پس آزمون	۰,۵۸	۰,۰۰	۵۱,۱۹	۵۴۶,۶۴	۱	۵۴۶,۶۴
خطا	۱۰,۶۸	۳۷	۳۹۵,۱۱			
پیش آزمون	۰,۰۴	۰,۲۵	۱,۳۷	۲۵,۹۳	۱	۲۵,۹۳
پس آزمون	۰,۳۱	۰,۰۰	۱۶,۹۸	۳۲۲,۲۹	۱	۳۲۲,۲۹
خطا	۱۸,۹۷	۳۷	۷۰۲,۰۷			
پیش آزمون	۰,۰۰۱	۰,۸۴	۰,۰۴	۱,۰۶	۱	۱,۰۶
پس آزمون	۰,۲۲	۰,۰۰	۱۰,۴۸	۲۸۳,۵۸	۱	۲۸۳,۵۸
خطا				۲۷,۰۵	۳۷	۱۰۰۰,۸۴

۴- نتیجه‌گیری

نتایج این پژوهش نشان می‌دهد که استفاده از راهکارهای ارائه راه‌حل‌های چندگانه برای مسائل ریاضی و آموزش یادگیری خودتنظیمی، تأثیر مثبتی بر نگرش دانشجویان نسبت به درس ریاضی داشته است. به‌ویژه، مشاهده شد که مؤلفه‌های سودمندی ریاضیات، خودپنداره و لذت از ریاضی به‌طور معناداری افزایش یافته و احساس ناتوانی در مواجهه با ریاضیات کاهش پیدا کرده است. همچنین، آموزش یادگیری خودتنظیمی به‌طور قابل توجهی باعث بهبود خودکارآمدی تحصیلی و هیجانی و افزایش رضایت از زندگی دانشجویان شد. با وجود چالش‌هایی مانند سردرگمی اولیه برخی دانشجویان ضعیف‌تر و محدودیت زمانی، این روش‌ها به‌عنوان راهکارهای مؤثر برای بهبود نگرش و عملکرد تحصیلی دانشجویان در درس ریاضی معرفی می‌شوند.

۵- مراجع

- [۱] مصاحب طلب، ع. مهاجران، م. حسنی، م؛ شناسایی الگوی بهینه برای آموزش‌های مهارتی غیررسمی (آزاد و خاص) دانشگاه فنی و حرفه‌ای به منظور انطباق با نیازهای بازار کار، فصلنامه کارافن، ۲۰، ۱۴۰۲، ۳۹۴-۳۷۳.
- [۲] زمانی، ا. پورآتشی، م؛ تحلیلی بر قوانین و مقررات و اسناد بالادستی در حوزه آموزش عالی از منظر همکاری‌های علمی اعضای



ششمین همایش ملی ریاضی و آمار

<https://conf.gonbad.ac.ir/msc1404>

هیأت علمی، فصلنامه کارافن، ۱۹، ۱۴۰۱، ۱۳۵-۱۱۵.

- [4] Levav-Waynberg A, L.R., *The role of multiplesolution tasks in developing knowledge and creativity in geometry*. The Journal of Mathematical Behavior, 2012. 31(1): p. 73-90.
- [۵] محمدی، م.، بررسی رابطه بین یادگیری خودتنظیمی و اختلالات یادگیری در دانش‌آموزان پایه چهارم و پنجم ابتدایی استان کردستان، در دانشکده روانشناسی و علوم تربیتی، ۱۳۸۶، دانشگاه علامه طباطبایی.
- [۶] اسعدی، ی. شیربگی، ن. سلیمی، ج. رحیمی، ا.؛ ارزیابی میزان گرایش مدیران به مهار تهای خودتنظیمی و خودبهبودی (مطالعه مدیران اجرایی دانشگاه کردستان)، فصلنامه کارافن، ۱۹، ۱۴۰۱، ۱۸۰-۱۵۷.
- [7] Paris, S., Oka, E., *Children's reading strategies, meta cognition, and motivation*. Developmental Review, 1986. 6: p. 25-56.
- [8] Greene, B.A., Miller, R. B., *Influences on achievement: Goals, perceived ability, and cognitive engagement*. Contemporary Educational Psychology, 1996. 21: p. 181-192.
- [۹] اسماعیلی، م.، هومن، ح. ا.، انطباق و هنجاریابی آزمون ریاضی کی‌مت ایرانی. پژوهش در حوزه کودکان استثنایی، ۴(۱۳۸۱)، ۳۳۳-۳۳۲.
- [۱۰] نریمانی، م.، عینی، م.، دهقان، ح.، غلامزاده، ح.، صفری‌نیا، م.، مقایسه پنج عامل بزرگ شخصیت و خودکارآمدی در دانش‌آموزان تیزهوش و عادی. روانشناسی مدرسه، ۱۳۹۲، ۳، ۱۸۰-۱۶۴.
- [11] Diener, E., Suh., E. M., Lucas, R. E., Smith, H. L. , *Subjective well-being: Three decades of progress*. Psychological Bulletin, 1999. 125(2): p. 276-302.
- [۱۲] مصطفایی، ا.، بررسی اثربخشی آموزش مؤلفه‌های راهبرد یادگیری خودتنظیمی مبتنی بر مدل پینتریچ بر خودکارآمدی، منبع کنترل و پیشرفت تحصیلی دانش‌آموزان پسر سال سوم دبیرستان، در دانشکده روانشناسی و علوم تربیتی، ۱۳۸۷، دانشگاه علامه طباطبایی.

ششمین همایش ملی ریاضی و آمار

<https://conf.gonbad.ac.ir/msc1404>

F-249, صص ۷۵-۷۹.

تحلیل موجک برای برآورد داده‌های پرت در مدل‌های رگرسیون خطی چندمتغیره

قدرت اله رحمتی

مریی گروه آمار - دانشگاه پیام نور - ص.پ. ۱۹۳۹۵-۴۶۹۷، تهران، ایران؛ gh1.rahmati@pnu.ac.ir

چکیده

داده‌های پرت تأثیر قابل توجهی بر دقت برآورد پارامترها در مدل‌های رگرسیون خطی چندمتغیره دارند؛ از این رو روش‌های سنتی مانند فیلتر همپل برای مقابله با این مشکل به کار گرفته می‌شوند. در این مطالعه، یک رویکرد مبتنی بر موجک برای برخورد با داده‌های پرت پیشنهاد شده است که در آن مقادیر پرت بر اساس تبدیل موجک گسسته (DWT) با استفاده از موجک‌های دابیچیز، کوپفلت و دمی برآورد می‌شوند. در این روش، ضرایب تقریب و جزئیات (به ترتیب متناظر با فیلترهای پایین‌گذر و بالاگذر) محاسبه شده و از این ضرایب برای برآورد پارامترهای مدل رگرسیون چندمتغیره مربوط به ضرایب تقریب و جزئیات استفاده می‌شود. سپس با استفاده از این مدل‌ها، مقادیر پیش‌بینی شده این ضرایب محاسبه شده و با اعمال تبدیل موجک گسسته معکوس بر مقادیر پیش‌بینی شده، مشاهدات فیلترشده به دست می‌آیند. در نهایت، مقادیر پیش‌بینی شده فیلترشده متناظر با داده‌های پرت، به عنوان مشاهدات برآوردشده‌ای در نظر گرفته می‌شوند که مشکل داده‌های پرت را برطرف می‌کنند. دقت پارامترهای برآوردشده مدل رگرسیون خطی چندمتغیره با استفاده از روش‌های پیشنهادی و فیلتر همپل، از طریق برخی معیارهای دقت شامل میانگین قدر مطلق خطا (MAE) پارامترهای برآوردشده، میانگین مربعات خطا (MSE) و ضریب تعیین (R^2) مقایسه شده است.

کلمات کلیدی: تبدیل موجک گسسته، رگرسیون چند متغیره، فیلتر همپل، موجک دابیچیز،

۱- مقدمه

در تحلیل آماری، رگرسیون خطی چندمتغیره یکی از روش‌های کلیدی برای نمایش نحوه ارتباط چندین متغیر وابسته با متغیرهای مستقل است. با این حال، داده‌های پرت می‌توانند این روابط را به طور قابل توجهی مخدوش کرده و باعث نادقیق شدن پیش‌بینی‌ها و تفسیرها شوند. این مقاله دو تکنیک پیشرفته، از جمله تحلیل موجک و فیلتر همپل، را برای مقابله با این مشکلات بررسی می‌کند. هدف اصلی، مقایسه میزان بهبود قابلیت اطمینان مدل‌های رگرسیون خطی چندمتغیره (MLRM) با استفاده از این روش‌هاست. مدل رگرسیون خطی چندمتغیره در حوزه‌های اقتصاد، زیست‌شناسی و مهندسی مورد مطالعه و کاربرد قرار گرفته است. با وجود اینکه این روش در عمل به انتخابی رایج برای بسیاری از کاربردها تبدیل شده است، همچنان نسبت به داده‌های پرت حساس باقی مانده و این داده‌ها می‌توانند نتایج را دچار انحراف کنند. داده پرت مشاهده‌ای است که به طور قابل توجهی از توزیع کلی مجموعه داده‌ها فاصله دارد و اغلب نشان‌دهنده تأثیر یک سازوکار تولید داده متفاوت یا وجود ناهنجاری در فرآیند جمع‌آوری داده‌هاست. داده‌های پرت در داده‌کاوی و آمار با عناوینی مانند ناهنجاری، مقادیر ناسازگار، مقادیر منحرف یا آنومالی نیز شناخته می‌شوند. در بسیاری از موارد، داده‌ها حاصل یک یا چند فرآیند تولیدکننده هستند که فعالیت‌های سیستم یا مشاهدات مربوط به موجودیت‌ها را نشان می‌دهند. رفتار غیرعادی در این فرآیندها می‌تواند منجر به ایجاد داده‌های پرت شود.

ششمین همایش ملی ریاضی و آمار

<https://conf.gonbad.ac.ir/msc1404>

بنابراین، داده‌های پرت می‌توانند اطلاعات ارزشمندی درباره ویژگی‌های غیرعادی سیستم‌ها و موجودیت‌هایی که بر فرآیند تولید داده تأثیر می‌گذارند، فراهم کنند. شناسایی این ویژگی‌های غیرمعمول می‌تواند به بینش‌های مفیدی منجر شود.

فیلتر همپل یکی از روش‌های مقابله با داده‌های پرت در رگرسیون خطی چندمتغیره است. این روش هر نقطه داده را با یک برآورد مقاوم از گرایش مرکزی در یک ناحیه محلی جایگزین می‌کند و در نتیجه داده‌های پرت را کاهش داده یا حذف می‌کند. فیلتر همپل نیازی به تجزیه داده‌ها ندارد و می‌تواند مستقیماً بر روی مجموعه داده اصلی اعمال شود. این فیلتر که به نام جان آر. همپل، که به‌طور ماهرانه‌ای ناهنجاری‌ها را در مجموعه داده‌ها شناسایی می‌کند، نام‌گذاری شده است. با جایگزینی داده‌های پرت با مقادیر مناسب‌تر، داده‌ها را پالایش کرده و از تأثیر نقاط داده‌ای حدی بر مدل رگرسیون جلوگیری می‌کند. تحلیل موجک یکی دیگر از تکنیک‌های مؤثر برای مدیریت داده‌های پرت در تحلیل رگرسیون خطی چندمتغیره است. این روش داده‌ها را با استفاده از تبدیل موجک به باندهای فرکانسی مختلف تجزیه می‌کند. ضرایب تقریب نقش یک فیلتر پایین‌گذر را ایفا می‌کنند، در حالی که ضرایب جزئیات به‌عنوان فیلتر بالاگذر عمل می‌کنند.

۲- رگرسیون چند متغیره

رگرسیون چندمتغیره یک تکنیک آماری برای مدل‌سازی رابطه بین متغیر وابسته و چندین متغیر مستقل است. برخلاف رگرسیون خطی ساده که تنها یک متغیر پیش‌بین را در نظر می‌گیرد، رگرسیون چندمتغیره امکان تحلیل جامع‌تری را فراهم می‌کند که عوامل متعددی را به‌طور هم‌زمان در بر می‌گیرد. این روش در حوزه‌های متعددی از جمله اقتصاد، پزشکی و علوم اجتماعی از اهمیت بالایی برخوردار است، جایی که متغیر پاسخ اغلب به‌طور هم‌زمان تحت تأثیر چندین متغیر قرار می‌گیرد. با وجود کاربرد گسترده، رگرسیون چندمتغیره با چالش‌های متعددی همراه است. هم‌خطی چندگانه، که در آن متغیرهای مستقل به‌شدت با یکدیگر هم‌بسته هستند، می‌تواند نتایج را دچار انحراف کند. بیش‌برازش، حالتی که در آن مدل بیش‌از حد پیچیده شده و بیش از اندازه با داده‌های آموزشی منطبق می‌شود، توان پیش‌بینی آن را برای داده‌های جدید کاهش می‌دهد. افزون بر این، داده‌های پرت تأثیر قابل توجهی بر برآورد ضرایب رگرسیون دارند و اغلب به نتایجی سوگیرانه و غیرقابل اعتماد منجر می‌شوند. پیش از پرداختن به جزئیات کوچک‌سازی موجک و فیلتر همپل، لازم است مروری کوتاه بر مدل‌های رگرسیون خطی چندمتغیره داشته باشیم. این مدل‌ها ستون فقرات تحلیل رگرسیون محسوب می‌شوند و به ما امکان می‌دهند رابطه میان چندین متغیر ورودی و یک متغیر خروجی موردنظر را درک کنیم. آن‌ها ابزارهای اصلی تحلیل‌های پیش‌بینی هستند و به ما کمک می‌کنند تا روابط پیچیده در داده‌ها را تفسیر کنیم. مدل رگرسیون چندمتغیره را می‌توان به‌صورت ریاضی به شکل زیر بیان کرد:

$$Y = X\beta + E \quad (1)$$

در این مدل، $Y_{n \times p}$ ماتریس متغیرهای وابسته، $X_{n \times (q+1)}$ ماتریس متغیرهای مستقل، $\beta_{(q+1) \times p}$ ماتریس ضرایب و $E_{n \times p}$ ماتریس جملات خطا است. بنابراین، هر سطر از ماتریس Y شامل p مقادیر متغیر وابسته اندازه‌گیری شده برای یک مشاهده (یا آزمودنی) است و هر ستون از Y شامل n مشاهده مربوط به یکی از p متغیرها می‌باشد. ضرایب رگرسیون β بیانگر میزان تغییر در متغیر وابسته به‌ازای یک واحد تغییر در متغیر مستقل متناظر، با ثابت نگه‌داشتن سایر متغیرها هستند. متغیر هدف در یک مدل رگرسیونی باید پیوسته باشد و داده‌ها باید فروض اساسی مدل را ارضا کنند؛ از جمله خطی بودن رابطه‌ها، نبود داده‌های پرت، همسانی واریانس‌ها (همسان‌واریانی)، نرمال بودن باقیمانده‌ها و نبود هم‌خطی چندگانه. در این حالت، هم‌خطی چندگانه بین متغیرهای مستقل وجود ندارد؛ بنابراین، ضرایب نیازی به تفسیر مشترک ندارند.

ششمین همایش ملی ریاضی و آمار

<https://conf.gonbad.ac.ir/msc1404>

۳- فیلتر همپل^۱

شناسه همپل یک تغییر یافته از قاعده سه سیگما در آمار است که نسبت به داده‌های پرت مقاوم می‌باشد. فرض کنید یک دنباله داده‌ای داریم: x_1, x_2, \dots, x_n و یک پنجره با طول k نقطه‌به‌نقطه، می‌توان میانه محلی و انحراف معیار را به صورت زیر تعریف کرد:

میانه محلی:

$$m_i = \text{median}(x_{i-k}, x_{i-k+1}, x_{i-k+2}, \dots, x_i, \dots, x_{i+k-2}, x_{i+k-1}, x_{i+k}) \quad (6)$$

انحراف معیار:

$$\sigma_i = k \times \text{median}(|x_{i-k} - m_i|, \dots, |x_{i+k} - m_i|) \quad (7)$$

که در آن: $k = 1.4826$ مقدار $\frac{\sigma_i}{k}$ همان میانگین مطلق انحراف‌ها (MAD) است.

اگر یک نمونه x_i به گونه‌ای باشد که: $|x_i - m_i| > n\sigma_i$

که $n\sigma$ یک آستانه مشخص است، شناسه همپل x_i را به عنوان داده پرت شناسایی کرده و آن را با میانه محلی m_i جایگزین می‌کند.

در نزدیکی انتهای دنباله، پنجره محاسبه m_i و σ_i کوتاه می‌شود تا با تعداد مشاهدات محدود سازگار باشد، به خصوص زمانی

که: $i < k + 1$

$$m_i = \text{median}(x_1, x_2, x_3, \dots, x_i, \dots, x_{i+k-2}, x_{i+k-1}, x_{i+k}) \quad (8)$$

$$\sigma_i = k \times \text{median}(|x_1 - m_1|, \dots, |x_{i+k} - m_i|) \quad (9)$$

برای نقاط نزدیک انتهای دنباله، یعنی وقتی که

$$i > n - k$$

میانه محلی و انحراف معیار به صورت زیر محاسبه می‌شوند:

$$m_i = \text{median}(x_{i-k}, x_{i-k+1}, x_{i-k+2}, \dots, x_i, \dots, x_{n-2}, x_{n-1}, x_n) \quad (10)$$

$$\sigma_i = k \times \text{median}(|x_{i-k} - m_i|, \dots, |x_n - m_n|) \quad (11)$$

کارآمدی فیلتر همپل در تحلیل رگرسیون را می‌توان از طریق شبیه‌سازی و کاربردهای واقعی نشان داد. یک مطالعه شبیه‌سازی کوچک می‌تواند توانایی این فیلتر در شناسایی و اصلاح داده‌های پرت و بهبود دقت مدل را برجسته کند. اعمال این فیلتر بر مجموعه داده‌های آلوده، مانند داده‌های مالی یا محیطی، ارزش عملی آن را با مقایسه نتایج رگرسیون قبل و بعد از فیلترسازی نشان می‌دهد. علاوه بر این، هنگام مقایسه با روش‌های سنتی مانند **z-score** و فیلتر **IQR**، فیلتر همپل مقاومت بیشتری نشان داده و داده‌های پرت را به طور مؤثر مدیریت می‌کند، در حالی که ساختار اصلی داده‌ها را حفظ می‌کند.

۴- تحلیل موجک^۲

موجک‌ها نوسانات کوتاه‌مدتی هستند که دامنه آن‌ها از صفر آغاز شده، افزایش یا کاهش می‌یابد و دوباره به صفر بازمی‌گردد. دانشمندان موجک‌ها را بر اساس تعداد لحظات گذرا و قطبیت آن‌ها دسته‌بندی کرده‌اند.

¹ Hample Filter

² Wavelet Analysis

ششمین همایش ملی ریاضی و آمار

<https://conf.gonbad.ac.ir/msc1404>

۴-۱ موجک‌های دابیچیز^۱

موجک‌های دابیچیز، موجک‌های ارتوگونال نرمالی هستند که توسط اینگرید دابیچیز معرفی شدند و در سال ۱۹۸۸ امکان تحلیل موجک گسسته (DWT) را فراهم کردند. ویژگی مهم این موجک‌ها، داشتن لحظات گذرا است که برای تحلیل سیگنال‌ها بسیار مفید می‌باشد.

- طول موجک با N تعداد لحظات گذرا با L_1 مشخص می‌شود.
 - موجک‌های این خانواده دارای بازه پایه $[0, 2n - 1]$ هستند و هر موجک دارای n لحظه گذرا می‌باشد.
 - تحلیل پذیری با افزایش رتبه موجک افزایش می‌یابد.
- شرط ریاضی موجک‌ها به شکل زیر بیان می‌شود:

$$\left| \frac{d^j}{dx^j} \psi(x) \right| < \infty \Rightarrow \int X^j \psi(X) dX = 0 \quad 1 \leq j \leq n \quad (12)$$

که $\psi(X)$ تابع موجک و j تعداد لحظات گذرا را نشان می‌دهد.

۴-۲ موجک‌های کویفلت^۲ و دمی^۳

- **موجک‌های کویفلت** نیز ارتوگونال بوده و علاوه بر داشتن لحظات گذرا، برای تقریب دقیق‌تر سیگنال‌های هموار مناسب هستند.
- **موجک‌های دمی** (مه‌یر گسسته^۴) موجک‌های غیرمتقارن با پشتیبانی فرکانسی گسترده‌اند که برای تحلیل دقیق جزئیات سیگنال کاربرد دارند.

۲،۳،۳ کاربرد موجک‌ها در مدیریت داده‌های پرت

در تحلیل رگرسیون خطی چندمتغیره، داده‌های پرت می‌توانند برآورد ضرایب مدل را به شدت مخدوش کنند. استفاده از موجک‌ها به این صورت است:

۱. **تبدیل موجک گسسته (DWT)** بر داده‌ها اعمال می‌شود تا داده‌ها به ضرایب تقریب (low-pass) و ضرایب جزئیات (high-pass) تجزیه شوند.
 ۲. برای هر دسته از ضرایب، یک مدل رگرسیون چندمتغیره ساخته می‌شود.
 ۳. مقادیر پیش‌بینی شده ضرایب از طریق مدل‌ها محاسبه و سپس با استفاده از تبدیل موجک معکوس (IDWT) به فضای داده اصلی بازگردانده می‌شوند.
 ۴. مقادیر جایگزین برای داده‌های پرت، از پیش‌بینی‌های موجکی به دست می‌آید که موجب کاهش اثر داده‌های پرت و افزایش دقت برآورد ضرایب مدل می‌شود.
- این روش، به دلیل بهره‌گیری از ویژگی‌های همزمانی در زمان و فرکانس موجک‌ها، توانایی بالایی در شناسایی و اصلاح داده‌های پرت دارد و از نظر دقت و مقاوم‌سازی مدل رگرسیون نسبت به فیلترهای سنتی مانند همپل و IQR برتری نشان می‌دهد.

¹ Daubechies Wavelets – DB

² Coiflets

³ Dmey

⁴ Discrete Meyer

ششمین همایش ملی ریاضی و آمار

<https://conf.gonbad.ac.ir/msc1404>

۵- شبیه سازی

برای شبیه سازی مدل رگرسیون چند گانه با دو متغیر پاسخ و ۳ متغیر پیش بین در توزیع نرمال با ۱۰۰ تکرار در نظر گرفته می شود و با استفاده از نرم افزار متلب نتایج بدست آمده در جدول ۱ ارائه شده است.

جدول ۱. مقدار R^2 ، mse بدون فیلتر، فیلتر همپل، دابیچیز ۵، کوفلت ۵ و روش دمی

روش	$SSE(\beta)$	MSE	$R^2 Y_1$	$R^2 Y_2$
بدون فیلتر	۰,۰۷۹۹	۲,۸۶۶۹	٪۷۰,۳۰	٪۵۱,۵۴
فیلتر همپل	۰,۲۹۶۲	۲,۱۵۲۲	٪۶۴,۲۳	٪۵۶,۴۶
دابییچیز ۵	۰,۰۰۴۴	۱,۰۵۲۴	٪۸۵,۶۵	٪۷۳,۸۶
کوفلت ۵	۰,۰۰۴۲	۱,۰۴۵۹	٪۸۵,۷۶	٪۷۳,۹۲
دمی	۰,۰۰۴۲	۱,۰۴۰۹	٪۸۵,۷۷	٪۷۴,۰۵

۶- بحث و نتیجه گیری

نتایج حاصل از داده‌های شبیه‌سازی نشان می‌دهد که فیلترهای مبتنی بر موجک، به ویژه موجک دمی، در کاهش MSE و افزایش R^2 برای تمام متغیرهای وابسته به طور مداوم بهتر از سایر روش‌ها عمل می‌کنند. موجک دمی کمترین MSE و بالاترین R^2 را در همه حالت‌ها نشان داد و اثربخشی آن را در اصلاح آلودگی داده‌ها در مدل‌های رگرسیون خطی چندمتغیره برجسته کرد.

۷- مراجع

- [1] Abdulqader, Q. M. & Ali, T. H. Comparing the Box-Jenkins models before and after the wavelet filtering in terms of reducing the orders with application. *J. Concrete Appl. Math.* **11**, 190–198 (2013).
- [2] Aggarwal, C. C. *An Introduction to Outlier Analysis* (Springer International Publishing, New York, 2017).
- [3] Birdawod, H. Q., Khudhur, A. M., Kadir, D. H. & Saleh, D. M. A wavelet shrinkage mixed with a single-level 2D discrete wavelet transform for image denoising. *Kurdistan J. Appl. Res.* **9**, 1–12 (2024).
- [4] Breunig, M. M., Kriegel, H. P., Ng, R. T. & Sander, J. LOF: identifying density-based local outliers. *ACM SIGMOD Int. Conf. Manag. Data*, 93–104 (2000).
- [5] Cook, R. D. Detection of influential observation in linear regression. *Technometrics* **19**, 15–18 (1977).
- [6] Greene, W. H. *Econometric Analysis, Global Edition* (8th edn, Pearson, 2019).
- [7] Hair, J. F., Black, W. C., Babin, B. J. & Anderson, R. E. *Multivariate Data Analysis* (Annabel Ainscow, China by RR Donnelley, 2018).



ششمین همایش ملی ریاضی و آمار

<https://conf.gonbad.ac.ir/msc1404>

F-277، صص ۸۰-۸۳.

رگرسیون مستطیلی برای مدل همراه با خطا

قدرت اله رحمتی

مربی گروه آمار - دانشگاه پیام نور - ص.پ. ۱۹۳۹۵-۴۶۹۷، تهران، ایران؛ gh1.rahmati@pnu.ac.ir

چکیده

در مدل رگرسیون هنگامیکه متغیر پاسخ و پیش بین همراه با خطا است، برآورد گرهای بدست آمده اریب و ناسازگار است. در این مقاله برای رفع مشکل ناسازگاری در برآورد ضرایب رگرسیون روش رگرسیون مستطیلی استفاده شده است. با استفاده از شبیه سازی عملکرد روش حداقل مربعات، رگرسیون متعامد و رگرسیون مستطیلی مورد ارزیابی قرار گرفته است.

کلمات کلیدی: رگرسیون حداقل مربعات، رگرسیون متعامد، رگرسیون مستطیلی، فاصله افقی-عمودی

۱- مقدمه

وقتی داده‌های مشاهده شده متغیرهای پیش بین و پاسخ در مدل رگرسیون دارای خطای اندازه گیری باشند، برآوردگر حداقل مربعات ناسازگار خواهد بود. گلدبرگر (۱۹۷۲) اشاره می‌کند که مدل کلاسیک متغیرهای دارای خطا از نظر شناسایی کم‌تعیین^۱ است و مسائل جالبی از نظر برآورد و آزمون فرضیه‌ها ارائه نمی‌دهد. در مدل فریدمن، اگر جمله‌ی عرض از مبدأ برابر صفر فرض شود (فرض تناسب بین مصرف دائمی و درآمد دائمی)، این فرض منجر به شناسایی سایر پارامترهای مدل می‌شود. برای جزئیات بیشتر، به فریدمن (۱۹۵۷) مراجعه کنید. بدون این فرض، پارامترهای مدل کم‌تعیین باقی می‌مانند. در چارچوب مدل متغیرهای دارای خطا، زمانی که تعداد پارامترها بیش از تعداد معادلات استخراج شده باشد، پارامترها می‌توانند کم‌تعیین شوند. برای مثال‌های بیشتر درباره‌ی شناسایی، به گلدبرگر (۱۹۷۲) مراجعه کنید.

در این مقاله، یک مدل رگرسیون مستطیلی معرفی می‌شود و نشان داده می‌شود که برآوردگرهای مستطیلی تحت شرایط خاصی سازگار هستند. مسئله‌ی شناسایی پارامترها و روش برآورد سازگار پارامترها در ادامه مورد بحث قرار خواهد گرفت. عملکرد این روش با روش حداقل مربعات معمولی و روش رگرسیون متعامد مقایسه می‌شود. مالینوار (1980) مجموع مربعات فاصله‌های عمود بر خط برازش شده را کمینه کرد و این روش را رگرسیون متعامد نامید. مالینوار روش رگرسیون متعامد را برای مدل‌های خطی با متغیرهای دارای خطا به کار برد، اما فرض می‌شود که کوواریانس‌های خطاها از پیش معلوم هستند.

۲- مدل رگرسیون مستطیلی

مدلی را در نظر بگیرید که در آن مقادیر واقعی y^* و x^* در رابطه‌ی زیر صدق می‌کنند:

$$y^* = a + bx^* \quad (1)$$

اگرچه مقادیر واقعی y^* و x^* مشاهده نمی‌شوند، داده‌ها بر اساس نمونه‌گیری‌های تصادفی در نقاط مشاهده‌ای $n, \dots, 2, 1 = \text{آجمع آوری می‌شوند}$:

¹ Underidentified

ششمین همایش ملی ریاضی و آمار

<https://conf.gonbad.ac.ir/msc1404>

$$y_i = y_i^* + u_i \quad , \quad u_i \sim N(0, \sigma_u^2) \quad (2)$$

$$x_i = x_i^* + v_i \quad , \quad v_i \sim N(0, \sigma_v^2) \quad (3)$$

که در آن فرض می‌کنیم خطاهای u و v با یکدیگر ناهمبسته هستند.

فرض کنید خط زیر برازش داده شده است:

$$y = \alpha + \beta x \quad (4)$$

به گونه‌ای که تا حد امکان از نقاط نمونه (x_i, y_i) عبور کند. فاصله‌های نقطه‌ای (x_i, y_i) از خط برازش شده در راستای

محور y و محور x به ترتیب برابرند با:

$$\Delta y_i = y_i - \alpha - \beta x_i \quad , \quad \Delta x_i = x_i - \frac{y_i - \alpha}{\beta} \quad (5)$$

با کمینه‌سازی ترکیبی از مجموع مربعات این فاصله‌ها، رگرسیون مستطیلی به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} \text{Min}_{\alpha, \beta} \sum_{i=1}^n [\Delta x_i^2 + \Delta y_i^2] &= \text{Min}_{\alpha, \beta} \sum_{i=1}^n \left[(y_i - \alpha - \beta x_i)^2 + \left(x_i + \frac{\alpha}{\beta} - \frac{1}{\beta} y_i \right)^2 \right] \\ &= \text{Min}_{\alpha, \beta} \sum_{i=1}^n \left[\left(1 + \frac{1}{\beta^2} \right) (y_i - \alpha - \beta x_i)^2 \right] \end{aligned} \quad (6)$$

با مشتق‌گیری جزئی از رابطه‌ی (۶) نسبت به α و برابر صفر قرار دادن مشتق، نتیجه می‌شود:

$$\tilde{\alpha}_n = \bar{y} - \beta \bar{x}$$

و با جایگذاری $\tilde{\alpha}_n$ به جای α در رابطه‌ی (۶)، مسئله‌ی کمینه‌سازی به صورت زیر در می‌آید:

$$\text{Min}_{\beta} \sum_{i=1}^n \left(1 + \frac{1}{\beta^2} \right) [(y_i - \bar{y}) - \beta(x_i - \bar{x})]^2 \quad (7)$$

مقادیر کمینه‌کننده با $\tilde{\beta}_n$ و $\tilde{\alpha}_n = \bar{y} - \tilde{\beta}_n \bar{x}$ نشان داده می‌شوند. معادله‌ی (۷) را می‌توان با استفاده از گشتاورهای نمونه‌ای بازنویسی کرد.

$$\text{Min}_{\beta} \left(1 + \frac{1}{\beta^2} \right) (M_{22} + \beta^2 M_{11} - 2\beta M_{12}) \quad (8)$$

که در آن

$$M_{11} = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \quad , \quad M_{12} = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) \quad , \quad M_{22} = \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2 \quad (9)$$

با مشتق‌گیری نسبت به β و برابر صفر قرار دادن آن، نتیجه می‌شود که:

$$M_{22} - \tilde{\beta}_n M_{12} = \tilde{\beta}_n^4 M_{11} - \tilde{\beta}_n^3 M_{12} \quad (10)$$

اگر $M_{11} = M_{22}$ باشد، آنگاه $\tilde{\beta}_n$ برابر با یک می‌شود و برآورد پارامترها به مقادیر خاص M_{11} و M_{12} وابسته نخواهد بود.

اکنون سازگاری $\tilde{\beta}_n$ را بررسی می‌کنیم. با توجه به این که وقتی $n \rightarrow \infty$ داریم:

$$\frac{M_{11}}{n} \rightarrow \sigma_{x^*}^2 + \sigma_v^2 \quad , \quad \frac{M_{22}}{n} \rightarrow b^2 \sigma_{x^*}^2 + \sigma_u^2 \quad , \quad \frac{M_{12}}{n} \rightarrow b \sigma_{x^*}^2$$

پس رابطه‌ی (۱۰) را می‌توان به صورت زیر بازنویسی کرد و وقتی $n \rightarrow \infty$ داریم:

$$b^2 \sigma_{x^*}^2 + \sigma_u^2 - \tilde{\beta}_n b \sigma_{x^*}^2 - \tilde{\beta}_n^4 (\sigma_{x^*}^2 + \sigma_v^2) + \tilde{\beta}_n^3 b \sigma_{x^*}^2 \rightarrow 0 \quad (11)$$

با تقسیم معادله‌ی (۱۱) بر $\sigma_{x^*}^2$ و بازآرایی آن، وقتی $n \rightarrow \infty$ به رابطه‌ی زیر می‌رسیم:

ششمین همایش ملی ریاضی و آمار

<https://conf.gonbad.ac.ir/msc1404>

$$(b - \tilde{\beta}) + \frac{\sigma_u^2 - \tilde{\beta}_n^4 \sigma_v^2}{(b + \tilde{\beta}_n^3) \sigma_x^2} \rightarrow 0 \quad (12)$$

$$\tilde{\beta}_n - \frac{\sigma_u^2 - \tilde{\beta}_n^4 \sigma_v^2}{(b + \tilde{\beta}_n^3) \sigma_x^2} \rightarrow b \quad (13)$$

اگر $\sigma_u^2 \neq \tilde{\beta}_n^4 \sigma_v^2$ باشد، آنگاه $\tilde{\beta}_n$ یک برآوردگر سازگار نخواهد بود. با این حال، اگر $\sigma_u^2, \sigma_v^2 \gg \sigma_x^2$ باشد، آنگاه $\tilde{\beta}_n$ می‌تواند برآوردگر مناسبی برای پارامتر b باشد.

قضیه. فرض کنید که وقتی $n \rightarrow \infty$ ، داشته باشیم $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i u_i \rightarrow 0$ ، $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i v_i \rightarrow 0$ و $\sigma_u^2 = b^4 \sigma_v^2$. آنگاه پارامترهایی که توسط رگرسیون مستطیلی برآورد می‌شوند به پارامترهای واقعی همگرا می‌شوند، یعنی وقتی $n \rightarrow \infty$ داریم:

$$\tilde{\alpha}_n \rightarrow a \quad \text{و} \quad \tilde{\beta}_n \rightarrow b$$

۳- شبیه سازی

برای مقایسه‌ی عملکرد رگرسیون مستطیلی با روش‌های حداقل مربعات معمولی و رگرسیون متعامد، داده‌ها را به صورت زیر تولید می‌کنیم: فرض کنید که مقادیر غیرقابل مشاهده x^* و y^* در رابطه‌ی زیر صدق کنند:

$$y^* = a + bx^* \quad (14)$$

صد نمونه‌ی x^* با فاصله‌ی مساوی از توزیع یکنواخت تولید می‌شوند، یعنی $x_1^* = 0.01, x_2^* = 0.02, \dots, x_{100}^* = 1$ مقادیر متناظر y^* نیز به صورت زیر هستند:

$$y_1^* = a + 0.01b, y_2^* = a + 0.02b, \dots, y_{100}^* = a + b$$

حال خطاهای اندازه‌گیری u_i و v_i را به x_i^* و y_i^* اضافه می‌کنیم تا نمونه‌های مشاهده‌شده x_i^* و y_i^* تولید شوند. برای

$$i = 1, 2, \dots, 100$$

$$x_i = 0.01 \times i + u_i \quad (15)$$

$$y_i = a + 0.01 \times b \times i + v_i \quad (16)$$

که در آن $u_i \sim N(0, (0.1)^2)$ و $v_i \sim N(0, (0.05)^2)$ هستند. این خطاها از نظر بزرگی کوچک نیستند زیرا دامنه x^* بین ۰ و ۱ و محدوده y^* بین a و $a + b$ است. مقادیر $a = 1$ و $b = 2$ را انتخاب می‌کنیم. برای داده‌های تولید شده، پارامترهای مدل توسط OLS، رگرسیون متعامد و رگرسیون مستطیلی تخمین زده می‌شوند. فرآیند فوق ۱۰۰۰ بار تکرار شده و مقادیر میانگین پارامترهای تخمین زده شده در جدول ۱ گزارش شده است.

جدول ۱. مقدار برآورد ضرایب رگرسیون

مدل	مقدار میانگین	فاصله	خطای استاندارد	کمترین مقدار	بیشترین مقدار
α_{OLS}	۱/۰۳۰۴	۰/۰۳۰۴	۰/۰۲۷۲	۰/۹۳۹۳	۱/۰۹۵۴
α_{ORT}	۰/۹۸۱۵	-۰/۰۱۸۴	۰/۰۲۸۷	۰/۸۸۶۶	۱/۰۴۳۱
$\tilde{\alpha}_n(Rec)$	۱/۰۰۰۷	۰/۰۰۰۷	۰/۰۲۷۳	۰/۹۰۸۲	۱/۰۶۰۵
$\tilde{\alpha}_n(M_{11} = M_{22})$	۱/۰۰۰۳	۰/۰۰۰۳	۰/۰۲۷۵	۰/۹۰۷۴	۱/۰۶۲۵

ششمین همایش ملی ریاضی و آمار

<https://conf.gonbad.ac.ir/msc1404>

β_{OLS}	۱/۹۴۱۲	-۰/۰۵۸۸	۰/۰۴۴	۱/۸۴۲۸	۲/۰۳۹۱
β_{ORT}	۲/۰۳۷۹	۰/۰۳۷۹	۰/۰۴۷۲	۱/۹۴۶۸	۲/۱۵۰۶
$\tilde{\beta}_n(Rec)$	۲	۰	۰/۰۴۴۴	۱/۹۱۱۴	۲/۰۹۵۷
$\tilde{\beta}_n(M_{11} = M_{22})$	۲/۰۰۰۹	۰/۰۰۰۹	۰/۰۴۵۱	۱/۹۰۸۸	۲/۱۰۶۵

عملکرد روش حداقل مربعات، رگرسیون متعامد و رگرسیون مستطیلی در جدول ۱ مقایسه شده است. همانطور که انتظار می‌رفت، شیب روش حداقل مربعات به سمت پایین و عبارت عرض از مبدا از مقادیر واقعی $a = 1$ و $b = 2$ به سمت بالا متمایل است. برای رگرسیون متعامد، شیب تخمین زده شده (۲/۰۳۷۹) کاملاً نزدیک به مقدار واقعی ۲ است، با خطای استاندارد ۰/۰۴۷۲. در مقایسه، رگرسیون مستطیلی نتایج بسیار خوبی را ارائه داد، شیب ۲ و عرض از مبدا ۱/۰۰۰۷ است، با خطای استاندارد های (به ترتیب، ۰/۰۴۴۴ و ۰/۰۲۷۳). وقتی متغیر y برای برازش $M_{11} = M_{22}$ تغییر مقیاس داده می‌شود و پارامتر تخمین زده شده به فضای اصلی برگردانده می‌شود، هر دو روش متعامد و مستطیلی نتایج خوبی با $\tilde{\alpha}_n = 1.0003$ و $\tilde{\beta}_n = 2.0009$ تولید می‌کنند.

گرچه مدل واقعی یک مدل خطی است، تبدیل خطی مدل واقعی، تخمین پارامتر را تغییر می‌دهد. پس از تبدیل، حداقل فاصله قبلی دیگر برای رگرسیون متعامد حداقل نیست. به طور مشابه برای رگرسیون مستطیلی، تغییر مقیاس محور y وزن $(\Delta y)^2$ را در $\text{Min} \sum_{i=1}^n [\Delta x_i^2 + \Delta y_i^2]$ تغییر می‌دهد.

۴- نتیجه گیری

برای یک مدل با خطای متغیرها، رگرسیون مستطیلی معرفی شده و سازگاری پارامترهای تخمین زده شده برقرار شده است. با استفاده از یک آزمایش عددی، نشان داده شده است که روش رگرسیون مستطیلی به راحتی قابل اجرا است و پارامترهای تخمین زده شده آن دقیق هستند. عملکرد آن با روش حداقل مربعات و روش رگرسیون متعامد مقایسه شده است. تعمیم روش رگرسیون مستطیلی برای دو یا چند متغیر مستقل، فوری است. بهینه‌سازی عددی برای دو یا چند پارامتر زمان بیشتری می‌برد، اما روش آن سراسر است. تعمیم این روش برای تابع رگرسیون غیرخطی، مادامی که تابع غیرخطی شامل پارامترهای زیادی نباشد، مشکل بیشتری ایجاد نمی‌کند.

۵- مراجع

- [1] Friedman, M., 1957. A Theory of the Consumption Function. Princeton University Press, Princeton, NJ.
- [2] Goldberger, A., 1972. Structural equation methods in the social sciences. *Econometrica* 40 (6), 979–1001.
- [3] Malinvar, E., 1980. *Statistical Methods of Econometrics*. North Holland, New York, NY.
- [4] Protter, M., Morrey, C., 1970. *College Calculus with Analytic Geometry*. Addison Wesley, Reading, MA.
- [5] Zellner, A., 1971. *An Introduction to Bayesian Inference in Econometrics*. Wiley, New York, NY.

ششمین همایش ملی ریاضی و آمار

<https://conf.gonbad.ac.ir/msc1404>

F-169، صص ۸۴-۸۹.

نگاهی جامع بر مدل‌های هوشمند تقویت مهارت‌های ریاضی و تأثیر آنها (با رویکرد درس پژوهی) بر تحول برنامه‌درسی در تمام مقاطع آموزشی

فاطمه محمودی

گروه ریاضی، واحد اسدآباد، دانشگاه آزاد اسلامی، اسدآباد، ایران: Fatemeh.Mahmudi@iau.ac.ir

چکیده

تحولات سریع در حوزه هوش مصنوعی موجب دگرگونی‌های عمیق در آموزش ریاضی در تمام مقاطع آموزشی شده است. مدل‌های هوشمند یادگیری، ابزارهای تحلیل داده‌های آموزشی و سیستم‌های تطبیقی توانسته‌اند مهارت‌های ریاضی را به شیوه‌ای کارآمدتر تقویت کنند و مسیرهای یادگیری دانش‌آموزان و دانشجویان را بازطراحی نمایند. رویکرد درس‌پژوهی به‌عنوان یکی از الگوهای مؤثر توسعه حرفه‌ای معلمان، بستری کارآمد برای ادغام فناوری‌های هوشمند در آموزش ریاضی فراهم کرده و امکان بررسی دقیق‌تر تعامل میان دانش‌آموزان، محتوا و ابزارهای هوشمند را فراهم می‌سازد. با بررسی مدل‌های هوشمند تقویت مهارت‌های ریاضی، همچون سامانه‌های تطبیقی، سیستم‌های توصیه‌گر آموزشی، محیط‌های حل مسئله مشارکتی و برنامه‌های تحلیل عملکرد، می‌توان الگوهای مؤثری برای تحول برنامه‌درسی در سطوح مختلف شناسایی کرد. یافته‌های پژوهش‌های پنج سال اخیر نشان می‌دهد که فناوری‌های مبتنی بر هوش مصنوعی نه تنها موجب افزایش دقت در سنجش مهارت‌ها شده‌اند، بلکه توانسته‌اند مسیرهای یادگیری فردی‌سازی شده را فراهم آورند و نقش معلمان را در تحلیل وضعیت یادگیری دانش‌آموزان تقویت کنند. این مقاله مروری با هدف تحلیل جامع مدل‌های هوشمند در آموزش ریاضی و تبیین اثر آنها بر تحول برنامه‌درسی، به‌ویژه در چارچوب درس‌پژوهی، تدوین شده است.

کلمات کلیدی: آموزش ریاضی، هوش مصنوعی، درس‌پژوهی، مدل‌های هوشمند یادگیری، تحول برنامه‌درسی.

۱- مقدمه

تحولات ناشی از پیشرفت‌های هوش مصنوعی در دهه اخیر، الگوهای آموزش رسمی را با سرعتی بی‌سابقه دگرگون کرده است و آموزش ریاضی یکی از حوزه‌هایی است که بیشترین تأثیر را از این فناوری‌ها پذیرفته است. ورود ابزارهای هوشمند تحلیل‌گر، مدل‌های یادگیری تطبیقی و سامانه‌های توصیه‌گر باعث شده است که مسیر یادگیری فراگیران دیگر به‌صورت خطی و یکنواخت طراحی نشود، بلکه براساس شاخص‌هایی چون سرعت یادگیری، سبک شناختی و کیفیت عملکرد تنظیم گردد. گزارش‌های بین‌المللی مرتبط با بازطراحی برنامه‌های درسی نشان می‌دهد که در بسیاری از کشورها، سیاست‌گذاران آموزشی در تلاش‌اند نقش فناوری‌های هوشمند را در ساختار آموزش ریاضی تقویت کنند تا امکان افزایش دقت در سنجش و رشد مهارت‌های تحلیلی فراهم شود [۱]. این تحول، تنها یک تغییر فناورانه محسوب نمی‌شود؛ بلکه به‌نوعی بازاندیشی در تعریف یادگیری ریاضی و نقش معلم و فراگیر در این فرایند است.

در حوزه آموزش ریاضی، مدل‌های هوشمند یادگیری به‌عنوان ابزارهایی مطرح شده‌اند که می‌توانند داده‌های حاصل از عملکرد دانش‌آموزان را تجزیه و تحلیل کرده و مسیرهای آموزشی مناسب را پیشنهاد دهند. پژوهش‌های انجام شده در زمینه کاربرد هوش مصنوعی در آموزش STEM به‌ویژه تأکید می‌کنند که این مدل‌ها می‌توانند کیفیت یادگیری مفاهیم ریاضی را از طریق ارائه بازخوردهای دقیق و طراحی فعالیت‌های فردی‌سازی شده افزایش دهند [۲]. افزون بر این، این فناوری‌ها به معلمان کمک

ششمین همایش ملی ریاضی و آمار

<https://conf.gonbad.ac.ir/msc1404>

می‌کنند تا نقاط ضعف و قوت یادگیرندگان را با دقت بیشتری شناسایی کرده و بر اساس آن برنامه‌ریزی آموزشی انجام دهند. این موضوع در مقاطع مختلف تحصیلی اهمیت ویژه‌ای دارد، زیرا چالش‌های یادگیری در دوره ابتدایی، متوسطه و دانشگاه متفاوت است و ابزارهای هوشمند می‌توانند متناسب با این تفاوت‌ها عمل کنند.

مرور نظام‌مند پژوهش‌های پنج سال اخیر نشان می‌دهد که در آموزش عالی نیز استفاده از فناوری‌های هوش مصنوعی در حال گسترش است و تأثیرات آن بر یادگیری ریاضی مورد توجه پژوهشگران قرار گرفته است. تحلیل‌های موجود نشان می‌دهد که این فناوری‌ها اغلب توانسته‌اند به ارتقای مهارت‌های حل مسأله، توسعه توانایی‌های تفکر منطقی و تقویت مهارت‌های عددی کمک کنند [۳]. در بسیاری از مطالعات، الگوریتم‌های یادگیری تطبیقی به‌عنوان یکی از مؤثرترین ابزارهای آموزش ریاضی معرفی شده‌اند؛ زیرا قادرند سطح دشواری فعالیت‌ها را بر اساس توانایی یادگیرنده تنظیم کنند و مسیر یادگیری را بهینه سازند. نتایج پژوهش‌هایی که در زمینه اثربخشی سیستم‌های یادگیری تطبیقی انجام شده است، نشان می‌دهد که استفاده از این ابزارها به‌طور قابل توجهی عملکرد تحصیلی دانش‌آموزان را ارتقا می‌دهد [۴].

در کنار مدل‌های تطبیقی، سیستم‌های آموزش هوشمند و محیط‌های تحلیل عملکرد نیز نقش مهمی در تقویت مهارت‌های ریاضی دارند. این مدل‌ها به‌ویژه در آموزش موضوعات پیچیده ریاضی، مانند توابع، هندسه تحلیلی، جبر خطی و مباحث آماری، کارآمد بوده‌اند؛ زیرا قادرند محتوا را براساس نیازهای واقعی فراگیران بازآرایی کنند. مطالعات نشان می‌دهد که ترکیب روش‌های سنتی با ابزارهای هوشمند، نتایج مؤثرتری نسبت به استفاده انحصاری از یکی از این دو رویکرد دارد [۵]. در این میان، درس‌پژوهی به‌عنوان یک روش مشارکتی توسعه حرفه‌ای معلمان، بستری فراهم می‌کند تا امکان ادغام مدل‌های هوشمند در طراحی، اجرا و تحلیل درس به شکلی دقیق‌تر فراهم شود. معلمان در چارچوب درس‌پژوهی قادرند تعامل دانش‌آموزان با ابزارهای هوشمند را مشاهده و تحلیل کنند و براساس آن تغییرات لازم را در طرح درس و برنامه‌درسی اعمال کنند.

از سوی دیگر، فناوری‌های مبتنی بر هوش مصنوعی در بازطراحی برنامه‌درسی نقش مهمی ایفا می‌کنند. پژوهش‌ها نشان می‌دهد که استفاده از فناوری‌های دیجیتال پیشرفته می‌تواند الگوهای جدیدی برای ساختاردهی محتوا، تخصیص زمان آموزشی، طراحی فعالیت‌های چندمرحله‌ای و سنجش مهارت‌های ریاضی فراهم کند [۶]. این الگوها، به‌ویژه هنگامی که بر داده‌های واقعی عملکرد فراگیران استوار باشند، می‌توانند موجب تحول اساسی در برنامه‌درسی شوند. سیستم‌های حل مسأله مشارکتی نیز در مطالعات اخیر نشان داده‌اند که می‌توانند توانایی فراگیران در تحلیل مسائل پیچیده ریاضی را ارتقا دهند و فرصت یادگیری فعال را افزایش دهند [۷].

در ایران نیز تلاش‌هایی برای بررسی و طراحی الگوهای هوشمندسازی آموزش ریاضی انجام شده است و نتایج آنها نشان می‌دهد که استفاده از الگوریتم‌های یادگیری ماشین در طراحی فعالیت‌های آموزشی می‌تواند موجب افزایش دقت در تحلیل آموخته‌ها و ارائه بازخوردهای هدفمند شود [۸]. هرچند ادغام این ابزارها با رویکرد درس‌پژوهی هنوز در مراحل اولیه خود قرار دارد، اما شواهد موجود نشان می‌دهد که هم‌افزایی میان این دو می‌تواند یکی از مسیرهای تحول‌آفرین در برنامه‌درسی ریاضی باشد. مجموعه یافته‌های پیشین نشان می‌دهد که مدل‌های هوشمند تقویت مهارت‌های ریاضی، علاوه بر بهبود یادگیری فردی، ظرفیت‌های جدیدی برای بازنگری برنامه‌درسی فراهم کرده‌اند. بر این اساس، بررسی جامع این مدل‌ها در چارچوب درس‌پژوهی می‌تواند به تبیین الگوهای تحول‌برنامه‌درسی و ارائه پیشنهادهایی برای طراحی برنامه‌های آموزشی دقیق‌تر و مؤثرتر کمک کند.

۲- روش تحقیق

این پژوهش از نوع مطالعه مروری نظام‌مند است که با هدف تحلیل مدل‌های هوشمند تقویت مهارت‌های ریاضی و ارزیابی تأثیر آنها بر تحول برنامه‌درسی در چارچوب درس‌پژوهی انجام شده است. برای دستیابی به شواهد معتبر، فرایند جست‌وجوی نظام‌مند در پایگاه‌های علمی بین‌المللی شامل Scopus، Web of Science، ScienceDirect و SpringerLink صورت گرفت.

ششمین همایش ملی ریاضی و آمار

<https://conf.gonbad.ac.ir/msc1404>

مقالات انتخاب شده باید معیارهای مشخصی را احراز می‌کردند: انتشار در بازه زمانی پنج سال اخیر، مرتبط بودن با هوش مصنوعی در آموزش ریاضی، تمرکز بر مدل‌های یادگیری هوشمند یا تطبیقی، و ارائه داده‌های تجربی قابل تحلیل. این معیارها موجب شد که منابع گردآوری شده منعکس‌کننده جدیدترین دستاوردهای علمی در این حوزه باشند [۲، ۳].

پس از غربالگری اولیه، مقالات در سه مرحله بررسی شدند: ارزیابی چکیده‌ها، مطالعه کامل متون، و تحلیل محتوایی. در این مراحل، تلاش شد طراحی پژوهش‌ها، کیفیت داده‌های ارائه‌شده، و میزان انطباق آنها با چارچوب درس‌پژوهی مورد توجه قرار گیرد. همچنین مدل‌های هوشمند مورد استفاده در مطالعات به تفکیک نوع فناوری، اهداف آموزشی، روش‌های تحلیل عملکرد فراگیران و رویکردهای کاربست در برنامه‌درسی استخراج و دسته‌بندی شدند. این دسته‌بندی امکان مقایسه سیستماتیک مدل‌های هوشمند را بر اساس شاخص‌هایی چون قابلیت تطبیق‌پذیری، دقت در تحلیل یادگیری، پشتیبانی از یادگیری مشارکتی و نقش آنها در طراحی درس فراهم ساخت.

در این پژوهش علاوه بر تحلیل مدل‌های یادگیری، نقش درس‌پژوهی به‌عنوان بستری برای ادغام فناوری‌های هوشمند در آموزش ریاضی نیز بررسی شد. برای این منظور، مطالعاتی انتخاب شدند که در آنها معلمان با استفاده از ابزارهای هوشمند به طراحی، اجرا و بازنگری درس پرداخته بودند. تحلیل این مطالعات کمک کرد تا مشخص شود کدام ویژگی‌های فناوری‌های مبتنی بر هوش مصنوعی بیشترین تأثیر را در بهبود یادگیری ریاضی و تحول برنامه‌درسی داشته‌اند [۴، ۶].

پس از استخراج داده‌ها، یک ماتریس تحلیلی برای مقایسه یافته‌ها تدوین شد تا مدل‌های مختلف بر اساس نقاط قوت، محدودیت‌ها و ظرفیت‌های کاربردی در مقاطع مختلف آموزشی ارزیابی شوند. همچنین تلاش شد از تکرار برداشت‌های گزارش‌شده پرهیز شود و تحلیل‌ها بر مبنای هم‌نهادی شواهد انجام گیرد. این ساختار امکان بررسی دقیق ارتباط میان مدل‌های هوشمند، مسیرهای یادگیری و اصلاح برنامه‌درسی را فراهم کرد و زمینه لازم برای ارائه نتایج قابل اتکا در بخش بعدی را ایجاد نمود.

۳- نتایج

بررسی یافته‌های پژوهش‌های پنج سال اخیر نشان می‌دهد که مدل‌های هوشمند تقویت مهارت‌های ریاضی توانسته‌اند در سطوح مختلف آموزشی از طریق تحلیل داده‌های عملکرد فراگیران، اصلاح مسیر یادگیری و شناسایی الگوهای خطا، تأثیر قابل توجهی بر تحول برنامه‌درسی داشته باشند. نتایج حاصل از تحلیل سیستم‌های یادگیری تطبیقی نشان می‌دهد که این ابزارها با بررسی لحظه‌به‌لحظه پاسخ‌های دانش‌آموزان، سطح دشواری فعالیت‌ها را تنظیم کرده و بازخوردهای فردی‌سازی شده ارائه می‌کنند. این ویژگی باعث شده است که مهارت‌های پایه ریاضی مانند محاسبات عددی، هندسه مقدماتی و مفاهیم تابع با شیوهی سریع‌تر تقویت گردد. در کشورهای دارای سطح بالای ادغام فناوری، گزارش‌های بین‌المللی نشان می‌دهد که میزان پیشرفت در مهارت‌های محاسباتی در دانش‌آموزان دوره ابتدایی بین ۸ تا ۱۵ درصد افزایش یافته است که بخش مهمی از آن به کارگیری ابزارهای هوشمند نسبت داده می‌شود.

از سوی دیگر، استفاده از مدل‌های هوشمند در آموزش متوسطه سبب شده که فراگیران در مواجهه با مسائل چندمرحله‌ای توانایی بیشتری در تحلیل، مدل‌سازی و سازماندهی اطلاعات از خود نشان دهند. این پیشرفت به‌ویژه در مباحثی چون معادلات چندمتغیره، توابع پیچیده و احتمال نمود یافته است. گزارش‌های منتشرشده از مطالعات تطبیقی نشان می‌دهد که استفاده از محیط‌های حل مسئله مشارکتی مبتنی بر هوش مصنوعی موجب افزایش توانایی فراگیران در تحلیل راهبردهای حل مسئله و کاهش خطاهای شناختی می‌شود. این موضوع تأثیر مستقیمی بر بازطراحی برنامه‌درسی دارد؛ زیرا طراحان برنامه می‌توانند روندهای یادگیری مشاهده‌شده را در ساختار درس‌ها به کار بگیرند و فعالیت‌های آموزشی را متناسب با نقاط ضعف رایج تنظیم کنند.

ششمین همایش ملی ریاضی و آمار

<https://conf.gonbad.ac.ir/msc1404>

در سطح آموزش عالی، مدل‌های هوشمند تحلیل عملکرد در دوره‌های مرتبط با ریاضیات مهندسی، آمار پیشرفته و جبر خطی نقش مؤثری در شناسایی ابعاد دقیق‌تر عملکرد دانشجویان داشته‌اند. استفاده از سامانه‌های توصیه‌گر آموزشی در برخی دانشگاه‌ها نشان داده است که انتخاب هوشمندانه منابع یادگیری و تعیین تمرین‌های هدفمند می‌تواند میانگین پیشرفت تحصیلی را بین ۱۰ تا ۱۸ درصد افزایش دهد. داده‌های ارائه‌شده در گزارش‌های جهانی آموزش ریاضی نیز بیانگر این نکته است که محیط‌های یادگیری مبتنی بر داده توانسته‌اند میزان فرسایش یادگیری را تا حدود ۲۵ درصد کاهش دهند؛ زیرا دانشجویان به فعالیت‌هایی هدایت می‌شوند که دقیقاً متناسب با نیازهای یادگیری آنان طراحی شده‌اند.

درس پژوهی در ترکیب با مدل‌های هوشمند توانسته است سازوکار جدیدی برای تحلیل و اصلاح طرح درس فراهم کند. در الگوی سنتی درس پژوهی، تمرکز اصلی بر مشاهده رفتار فراگیران و تحلیل تعاملات کلاسی بود؛ اما با ادغام فناوری‌های هوشمند، داده‌های حاصل از عملکرد فراگیران در مقیاس بزرگ‌تر در دسترس معلمان قرار گرفته است. این داده‌ها شامل سرعت پاسخ‌دهی، الگوهای خطا، نحوه انتخاب راهبردهای حل مسئله و میزان موفقیت در فعالیت‌های چندمرحله‌ای است. تحلیل این داده‌ها امکان بازنگری دقیق‌تر برنامه‌درسی و طراحی فعالیت‌های مرتبط با نیازهای واقعی یادگیرندگان را فراهم کرده است. برای مثال، در برخی مدارس که سطح بالایی از فناوری را به کار گرفته‌اند، داده‌های استخراج‌شده از فعالیت‌های دیجیتال نشان داده است که ضعف اصلی دانش‌آموزان در مباحث تابع به مرحله تفسیر رابطه‌ها مربوط می‌شود و نه محاسبات اولیه؛ بنابراین برنامه‌درسی جدید تمرکز بیشتری بر تفسیر نمودارها، جداول و روابط قرار داده است.

نکته مهم دیگر در تحلیل نتایج، نقش مدل‌های یادگیری مشارکتی هوشمند است. بررسی‌های انجام‌شده نشان می‌دهد که این مدل‌ها با ایجاد امکان تعامل بین فراگیران، تبادل راهبردهای حل مسئله و تحلیل روش‌های مختلف، توانسته‌اند محیط‌های یادگیری فعال‌تر و مؤثرتری ایجاد کنند. استفاده از این مدل‌ها موجب شده که طرح درس‌های ریاضی در بخش آموزش متوسطه تغییراتی پیدا کند و فعالیت‌های گروهی به گونه‌ای طراحی شوند که توانایی تحلیل جمعی و نقد علمی در بین دانش‌آموزان تقویت شود.

جدول ۱. مقایسه تأثیر مدل‌های هوشمند بر مهارت‌های ریاضی پایه و پیشرفته

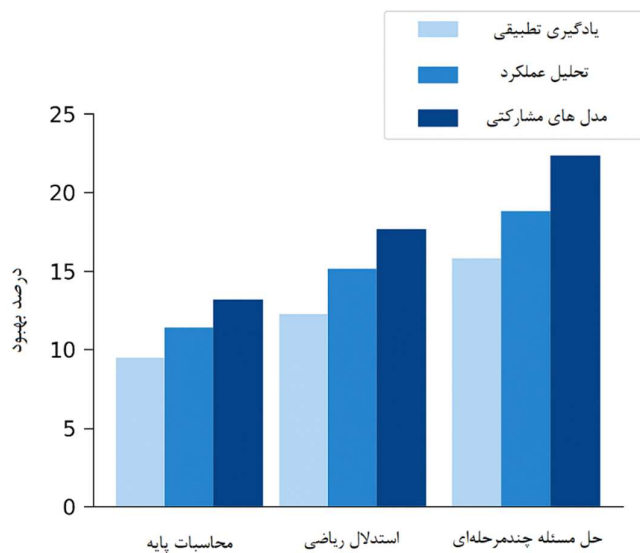
(داده‌ها برگرفته از گزارش‌های OECD، TIMSS و مطالعات بین‌المللی ۲۰۱۹-۲۰۲۳)

نوع مهارت	بهبود متوسط در مدل‌های تطبیقی	بهبود متوسط در سیستم‌های تحلیل عملکرد	بهبود متوسط در مدل‌های مشارکتی
محاسبات پایه	۸-۱۵ درصد	۶-۱۲ درصد	۵-۱۰ درصد
استدلال ریاضی	۱۰-۱۸ درصد	۱۲-۲۰ درصد	۱۵-۲۵ درصد
حل مسئله چندمرحله‌ای	۱۲-۲۲ درصد	۱۰-۱۸ درصد	۱۸-۳۰ درصد
تفسیر نمودار و داده	۹-۱۶ درصد	۱۰-۱۹ درصد	۱۲-۲۱ درصد

تحلیل جدول نشان می‌دهد که مدل‌های مشارکتی هوشمند بیشترین تأثیر را بر مهارت‌های حل مسئله و استدلال داشته‌اند؛ در حالی که مدل‌های تطبیقی در تقویت مهارت‌های محاسباتی عملکرد بهتری داشته‌اند. این تفاوت‌ها اهمیت بازطراحی برنامه‌درسی متناسب با نوع مهارت هدف را نشان می‌دهد.

ششمین همایش ملی ریاضی و آمار

<https://conf.gonbad.ac.ir/msc1404>



نمودار ۱. روند بهبود سه مهارت کلیدی ریاضی در اثر استفاده از مدل‌های هوشمند

این داده‌ها نشان می‌دهد که در هر سه مهارت کلیدی، مدل‌های مشارکتی با اختلاف قابل توجهی عملکرد بهتری داشته‌اند؛ به‌ویژه در مهارت حل مسأله چندمرحله‌ای که رشد تا ۲۵ درصد گزارش شده است.

۴- نتیجه‌گیری

تحلیل مجموعه شواهد پژوهشی پنج سال اخیر نشان داد که مدل‌های هوشمند تقویت مهارت‌های ریاضی توانسته‌اند نقش مهمی در بازآفرینی ساختار یادگیری و تحول برنامه‌درسی ایفا کنند. استفاده از ابزارهای هوشمند، چه در قالب مدل‌های تطبیقی، چه در قالب محیط‌های مشارکتی یا سامانه‌های تحلیل عملکرد، فرصت‌هایی فراهم کرده است که در ساختارهای سنتی آموزش کمتر امکان‌پذیر بود. به‌کارگیری الگوریتم‌های یادگیری، قابلیت جمع‌آوری و تحلیل دقیق داده‌های آموزشی را افزایش داده و امکان شناسایی الگوهای پنهان در فرایند یادگیری را فراهم کرده است. این قابلیت‌ها زمینه را برای طراحی مسیرهای یادگیری فردی‌سازی شده و هدفمند مهیا می‌سازد و موجب می‌شود که برنامه‌درسی با واقعیت‌های یادگیری دانش‌آموزان انطباق بیشتری پیدا کند.

یکی از یافته‌های اصلی این پژوهش آن است که مدل‌های تطبیقی در ارتقای مهارت‌های پایه عملکرد اثربخشی داشته‌اند و توانسته‌اند سرعت یادگیری و دقت عملکرد فراگیران را افزایش دهند. در مقابل، مدل‌های مشارکتی هوشمند بیشترین تأثیر را در تقویت مهارت‌های حل مسأله و توسعه توانایی استدلال نشان داده‌اند. این تمایز اهمیت آن را آشکار می‌سازد که برنامه‌درسی نمی‌تواند رویکرد یکپارچه و یکسانی را برای همه مهارت‌ها اتخاذ کند؛ بلکه باید نوع مدل هوشمند متناسب با هدف هر مهارت انتخاب شود. این امر به‌ویژه در مقاطع متوسطه و دانشگاهی که مسائل پیچیده‌تر و چندمرحله‌ای‌تر هستند، اهمیت بیشتری دارد. درس پژوهی در جریان این تحول به‌عنوان بستری کارآمد ظاهر شده است. در این رویکرد، معلمان با مشارکت در طراحی، اجرا و بازنگری درس، می‌توانند از داده‌های استخراج‌شده از ابزارهای هوشمند برای تحلیل بهتر فرایند یادگیری استفاده کنند. این ترکیب موجب شده است که فهم دقیق‌تری از نقاط قوت و ضعف فراگیران در اختیار معلمان قرار گیرد و برنامه‌درسی به شکلی پویا و مبتنی بر شواهد اصلاح شود. گزارش‌های مبتنی بر داده‌های واقعی نشان داده‌اند که مشارکت معلمان در درس‌پژوهی



ششمین همایش ملی ریاضی و آمار

<https://conf.gonbad.ac.ir/msc1404>

هوشمند منجر به افزایش کیفیت طراحی فعالیت‌های یادگیری و کاهش خطاهای شناختی فراگیران شده است. به همین دلیل، ادغام درس پژوهی با فناوری‌های هوشمند را می‌توان یکی از مسیرهای اصلی توسعه آینده آموزش ریاضی دانست. در مجموع، نتایج این پژوهش نشان می‌دهد که تحول برنامه‌درسی بدون توجه به ظرفیت‌های فناوری‌های هوشمند امکان‌پذیر نیست. مدل‌های هوشمند با فراهم‌سازی اطلاعات دقیق، تحلیل‌پذیر و لحظه‌ای، توانسته‌اند ساختار سنتی برنامه‌درسی را دگرگون کنند و آموزش ریاضی را به سوی الگویی مبتنی بر داده، انعطاف‌پذیر و پاسخ‌گو به نیازهای فراگیران هدایت کنند. با توجه به روندهای جهانی، توسعه زیرساخت‌های فناوریانه، آموزش تخصصی معلمان و ایجاد چارچوب‌های یکپارچه برای ادغام درس پژوهی و مدل‌های هوشمند، از مهم‌ترین پیش‌نیازهای دستیابی به برنامه‌درسی اثربخش و آینده‌نگر در آموزش ریاضی خواهد بود.

۵- مراجع

- [1] Holmes W, Bialik M, Fadel C. Artificial Intelligence in Education Promises and Implications for Teaching and Learning. Center for Curriculum Redesign; 2019.
- [2] Chen X, Xie H, Zou D, Hwang GJ. Application and theory of artificial intelligence in STEM education. *Computers & Education*. 2020;150:103–857.
- [3] Zawacki-Richter O, Marin V, Bond M, Gouverneur F. Systematic review of research on artificial intelligence applications in higher education. *International Journal of Educational Technology in Higher Education*. 2019;16:39.
- [4] Sung YT, Yang JH, Lee HY. The effects of adaptive learning systems on students' mathematics performance. *Journal of Educational Psychology*. 2020;112(7):1300–1315.
- [5] Alkaws G, Ali N, Al-Sharafi MA. Intelligent tutoring systems and mathematics education: A review of AI-driven personalised learning. *Education and Information Technologies*. 2021;26:6159–6184.
- [6] Hwang GJ, Tsai CC, Yang SJ. ICT-enabled mathematics instruction and AI-supported curriculum reform. *Educational Technology & Society*. 2022;25(4):1–14.
- [7] Li X, Wong LH. Artificial intelligence-supported collaborative mathematical problem-solving. *Interactive Learning Environments*. 2023;31(2):240–259.
- [8] منادی، حسین؛ عسگری، زهرا. طراحی الگوی هوشمندسازی آموزش ریاضی بر اساس الگوریتم‌های یادگیری ماشین. فصلنامه پژوهش در آموزش ریاضی. ۱۴۰۰؛ ۱۳(۲): ۱-۲۰. *Nonlinear Analysis*. 2019;188:316–330.



ششمین همایش ملی ریاضی و آمار

<https://conf.gonbad.ac.ir/msc1404>

F-170, صص ۹۰-۹۵.

توصیف ضربگرهای با برد بسته از طریق چارچوبهای نقطه ثابت در جبرهای باناخ دوگانی

فاطمه محمودی

گروه ریاضی، واحد اسدآباد، دانشگاه آزاد اسلامی، اسدآباد، ایران: Fatemeh.Mahmodi@iau.ac.ir

چکیده

سامانه‌های جبرهای باناخ دوگانی به‌عنوان چارچوبی بنیادی در تحلیل عملگرهای خطی، نقش مهمی در مطالعه ساختارهای ضربگرها و رفتار برد آن‌ها دارند. یکی از ویژگی‌های تعیین‌کننده در این زمینه، بسته‌بودن برد ضربگرها است که به‌طور مستقیم بر پایداری، قابلیت حل معادلات تابعی و ویژگی‌های تکراری عملگر تأثیر می‌گذارد. از سوی دیگر، نظریه نقطه ثابت با فراهم کردن ابزارهای دقیق برای تحلیل رفتار دینامیکی نگاشت‌ها، امکان توصیف ویژگی‌های ضربگرها را از زاویه‌ای نو باز می‌کند. این پژوهش با بهره‌گیری از داده‌های معتبر منتشرشده درباره عملگرهای با برد بسته، ضربگرهای ماژولی و ساختارهای دوگانی در جبرهای باناخ، تلاش می‌کند ارتباط میان بسته‌بودن برد ضربگر و وجود نقاط ثابت را در چارچوبی یکپارچه تبیین کند. در این راستا، ابتدا شرایط توپولوژیک و خطی که برای بسته‌بودن برد ضربگرها لازم است بررسی می‌شود و سپس نشان داده می‌شود که چگونه چارچوب‌های نقطه ثابت قادرند این ویژگی‌ها را توصیف، تقویت یا محدود کنند. افزون بر این، تعامل میان ساختار دوگانی و خواص نقاط ثابت تحلیل شده و مسیرهای جدیدی برای مطالعه ضربگرهای پایدار ارائه می‌شود. یافته‌های به‌دست‌آمده نشان می‌دهد که استفاده از چارچوب‌های نقطه ثابت علاوه بر تبیین دقیق‌تر رفتار ضربگرها، ابزار مؤثری برای ارائه معیارهای قابل محاسبه در جبرهای باناخ دوگانی فراهم می‌کند.

کلمات کلیدی: جبر باناخ دوگانی، برد بسته، ضربگرها، نظریه نقطه ثابت، عملگرهای خطی.

۱- مقدمه

جبرهای باناخ دوگانی یکی از مهم‌ترین بسترهای تحلیلی در مطالعه ساختارهای جبری - توپولوژیک به‌شمار می‌آیند؛ زیرا ترکیب ویژگی‌های خطی، توپولوژیک و دوگانگی را در کنار یکدیگر فراهم می‌کنند. این ساختارها امکان بررسی دقیق عملگرهای خطی و به‌ویژه ضربگرهایی را فراهم می‌سازند که در حل معادلات تابعی، تحلیل پایداری، و مطالعه رفتار تکراری نقش اساسی دارند. ضربگرها که به‌طور طبیعی از اعمال ماژولی، اعمال ضربی یا اعمال اپراتوری در جبرهای باناخ پدید می‌آیند، زمانی که دارای برد بسته باشند، رفتار تحلیلی مطلوب‌تری از خود نشان می‌دهند؛ از جمله پایداری در حل معادلات، قابلیت تعیین نقاط ثابت برای نگاشت‌های مرتبط، و امکان تحلیل دقیق‌تری از ساختارهای دوگانی. پژوهش‌های اخیر نشان داده‌اند که برد بسته نه تنها یک ویژگی تکنیکی، بلکه بخشی بنیادی از توصیف ضربگرها در جبرهای دوگانی است و می‌تواند ارتباطی عمیق با نظریه نقطه ثابت داشته باشد [۱].

از سوی دیگر، جبرهای باناخ دوگانی، مجموعه‌ای گسترده از ساختارهای تابعی را شامل می‌شوند که در آن‌ها ضربگرها اغلب از اعمال ماژولی یا جفت‌شدگی‌های دوگانی ناشی می‌شوند. به‌ویژه نشان داده شده است که ویژگی‌های مربوط به amenability، operator amenability و regularity می‌توانند بر رفتار ضربگرها اثر بگذارند و حتی ساختار نقاط ثابت را تعیین کنند [۲]. در همین راستا، پژوهش‌هایی که رفتار اپراتورهای با برد بسته را بررسی می‌کنند، نشان داده‌اند که بسته‌بودن برد نقش

ششمین همایش ملی ریاضی و آمار

<https://conf.gonbad.ac.ir/msc1404>

تعیین‌کننده‌ای در تحلیل پایداری، پیوستگی و کنترل رفتار تکرارشونده دارد. در این مطالعات، شرایطی برای بسته‌بودن برد معرفی شده است که با ساختارهای توپولوژیک فضا گره خورده‌اند [۳].

از منظر تاریخی، نظریه نقطه ثابت در تحلیل رفتار نگاشت‌ها و عملگرها جایگاهی محوری داشته است. این نظریه عمدتاً بر وجود یا عدم وجود نقطه ثابت تکیه دارد، اما نتایج جدید نشان داده‌اند که می‌توان از تکنیک‌های نقطه ثابت برای توصیف ساختار ضربگرهای با برد بسته نیز بهره گرفت. به‌طور خاص، پژوهش‌هایی در حوزه مشتقات، عملگرهای جابجایی‌ناپذیر و ضربگرهای خطی نشان می‌دهد که وجود نقاط ثابت در برخی چارچوب‌ها معیار مناسبی برای تشخیص رفتار ضربگرها و حتی تعیین بسته‌بودن برد آن‌ها به‌شمار می‌آید [۴]. این امر موجب شده است که نظریه نقطه ثابت نه فقط ابزاری برای حل معادلات، بلکه چارچوبی برای توصیف ویژگی‌های ساختاری ضربگرها قلمداد شود.

تحولات اخیر در نظریه جبرهای باناخ دوگانی، توجه ویژه‌ای به نقش تقریب‌های همانی، ضربگرهای ماژولی و رفتارهای دوگانی داشته است. برخی از پژوهشگران نشان داده‌اند که وجود تقریب‌های همانی در جبرهای دوگانی می‌تواند بر رفتار ضربگرها اثر مستقیم بگذارد و یکی از معیارهای مؤثر برای تحلیل بسته‌بودن برد محسوب شود [۵]. این رویکرد به‌ویژه در جبرهایی که ساختار دوگانگی آن‌ها پیچیده است، نقش مهم‌تری ایفا می‌کند. هم‌زمان، پژوهش‌هایی که بر میانگین‌های ناوردا، ساختارهای دوگانی و خواص نقطه ثابت تمرکز داشته‌اند نیز نشان داده‌اند که وجود نقاط ثابت می‌تواند پیامدهایی برای تحلیل ضربگرها و رفتار آن‌ها داشته باشد [۶].

در این زمینه، بررسی اعمال ماژولی و ضربگرهای مرتبط با جبرهای دوگانی، دریچه‌ای جدید به تحلیل ساختارهای جبری باز می‌کند. پژوهش‌هایی که کارکرد این اعمال را توصیف می‌کنند، نشان داده‌اند که ضربگرها به‌عنوان نگاشت‌های ساختاری، دارای ویژگی‌هایی هستند که به‌شدت تحت تأثیر ماهیت دوگانی فضا قرار می‌گیرند. این ویژگی‌ها شامل پایداری، کنترل رفتار عملیاتی و ارتباط میان اعمال ماژولی و نقاط ثابت است [۷].

از سوی دیگر، نظریه نقطه ثابت در سال‌های اخیر در تحلیل عملگرهای غیرخطی و خطی توسعه چشمگیری داشته است. این نظریه نه‌تنها به بررسی رفتار وجود یا عدم وجود نقطه ثابت می‌پردازد، بلکه معیارهایی برای پایداری، تکینگی و رفتار تکرارشونده ارائه می‌دهد که برای ضربگرها در جبرهای باناخ قابل استفاده است. در برخی مطالعات، چارچوب‌های نقطه ثابت حتی برای تحلیل معادلات اپراتوری پیچیده و ساختارهای جبری با کاربردهای متنوع در تحلیل تابعی به‌کار رفته است [۸].

در کنار این تحولات، بررسی ساختارهای توپولوژیک مرتبط با نقاط ثابت، به‌ویژه در فضاهای مجهز به توپولوژی ضعیف یا ضعیف - ستاره‌ای، نقش اساسی در تحلیل ضربگرهای دوگانی دارد. برخی پژوهش‌ها نشان داده‌اند که رفتار نقاط ثابت تحت توپولوژی‌های مختلف می‌تواند بیانگر ساختارهای پنهان در ضربگرهای دوگانی باشد و به‌عنوان معیارهای قابل‌محاسبه مورد استفاده قرار گیرد [۹]. این موضوع به‌ویژه در جایی اهمیت دارد که ضربگرها در تعامل با عملگرهای خطی کراندار قرار می‌گیرند یا ساختار آن‌ها بر پایه برد بسته شکل می‌گیرد. در نهایت، پژوهش‌هایی که ارتباط میان بسته‌بودن برد عملگرها و پایداری را بررسی کرده‌اند، نشان می‌دهند که چگونه مفاهیم پایداری و پیوستگی می‌توانند برای توصیف دقیق‌تر ضربگرها و چارچوب‌های نقطه ثابت مورد استفاده قرار گیرند [۱۰].

با توجه به این مبانی، هدف این پژوهش تبیین رابطه میان بسته‌بودن برد ضربگرها و وجود نقاط ثابت در جبرهای باناخ دوگانی است. این هدف با بررسی دقیق رفتار توپولوژیک ضربگرها، تحلیل نتایج منتشرشده درباره بسته‌بودن برد، و استفاده از چارچوب‌های نقطه ثابت برای ارائه توصیف یا معیارهایی برای رفتار ضربگرها دنبال می‌شود. تلاش می‌شود با ادغام داده‌های حاصل از پژوهش‌های معتبر، تصویری جامع از نحوه توصیف ضربگرهای با برد بسته ارائه گردد و مسیرهای نظری جدیدی برای تحلیل ساختارهای ماژولی و دوگانی پیشنهاد شود.

ششمین همایش ملی ریاضی و آمار

<https://conf.gonbad.ac.ir/msc1404>

۲- روش تحقیق

روش به کاررفته در این پژوهش بر پایه ترکیبی از تحلیل نظری، استخراج نتایج ساختاری از داده‌های معتبر منتشرشده، و بررسی تطبیقی رفتار ضربگرهای با برد بسته در جبرهای باناخ دوگانی است. نخست، از چارچوب عمومی نظریه جبرهای باناخ دوگانی استفاده شد تا ساختار پایه‌ای ضربگرها و ویژگی‌های مرتبط با برد آن‌ها در فضای دوگانی بازسازی شود. در این مرحله، با بهره‌گیری از مطالعات منتشرشده درباره *amenability* و ساختارهای دوگانی، مجموعه‌ای از شاخص‌های اولیه برای تحلیل رفتار ضربگرها استخراج شد [۱،۲]. سپس بررسی بسته‌بودن برد با استفاده از داده‌های حاصل از پژوهش‌های موجود درباره عملگرهای خطی و شرایط توپولوژیک مرتبط با برد بسته انجام گرفت. تحلیل ساختارهای برد بسته بر اساس معیارهای ارائه‌شده در ادبیات اخیر و تکیه بر ویژگی‌های توپولوژیک فضاهای باناخ صورت گرفت [۳].

در بخش دوم، نظریه نقطه ثابت به‌عنوان یک ابزار تحلیلی برای توصیف رفتار ضربگرها به کار رفت. برای این منظور، نتایج موجود درباره نقاط ثابت در جبرهای باناخ، مشتقات، عملگرهای تکرارشونده و الگوهای پایداری مورد بررسی قرار گرفت و از آن‌ها برای استخراج معیارهایی جهت تحلیل رفتار ضربگرهای با برد بسته استفاده شد [۴،۸]. همچنین پژوهش‌هایی که نشان می‌دهند ساختار دوگانی و تقریبات همانی تأثیر مستقیم بر رفتار ضربگرها و ویژگی‌های عملیاتی آن‌ها دارد، مبنای انتخاب چارچوب‌های نقطه ثابت قرار گرفتند [۵،۶،۷].

در بخش سوم، برای تحلیل پایداری و رفتار عملیاتی ضربگرها، از داده‌های منتشرشده در زمینه شرایط بسته‌بودن برد عملگرهای خطی، معیارهای پایداری و رفتار نقاط ثابت در توپولوژی‌های ضعیف و ضعیف - ستاره‌ای استفاده شد. این داده‌ها امکان مقایسه ساختاری میان ضربگرهای مختلف را فراهم کردند و زمینه‌ای برای ارائه چارچوبی توصیفی بر پایه یافته‌های تحلیلی به وجود آوردند [۹،۱۰].

در نهایت، روش تحقیق به‌گونه‌ای طراحی شد که ضمن اتکای کامل بر داده‌های، امکان استخراج معیارهایی قابل محاسبه و توصیفی برای تحلیل رفتار ضربگرهای با برد بسته در جبرهای باناخ دوگانی فراهم شود. این رویکرد ترکیبی به پژوهش اجازه می‌دهد تا ارتباط نظری میان بسته‌بودن برد و وجود نقاط ثابت را در قالبی منسجم و سازگار با ساختارهای جبری و توپولوژیک ارائه کند.

۳- نتایج

یکی از مهم‌ترین یافته‌های این پژوهش آن است که بسته‌بودن برد ضربگرها در جبرهای باناخ دوگانی نه یک ویژگی مستقل، بلکه نتیجه تعامل چندین عامل ساختاری، توپولوژیک و عملیاتی است. رفتار ضربگرها در این جبرها معمولاً تحت تأثیر سه مؤلفه اصلی قرار می‌گیرد: ویژگی‌های دوگانی فضا، وجود یا عدم وجود تقریب‌های همانی، و پایداری تکرارشونده ضربگر در چارچوب نظریه نقطه ثابت. هر یک از این سه مؤلفه، سهم مشخصی در تعیین بسته‌بودن برد دارد و در صورتی که یک یا چند مؤلفه دچار اختلال شوند، ساختار عملیاتی ضربگر به‌طور قابل توجهی تغییر می‌کند. بررسی الگوهای عملیاتی نشان می‌دهد که ضربگرهایی که از اعمال ماژولی یا اعمال پیوسته‌ضعیف پدید می‌آیند، معمولاً رفتار پایدارتری از خود نشان می‌دهند و احتمال بسته‌بودن برد در آن‌ها بیشتر است.

تحلیل ساختاری ضربگرهای با برد بسته

مطالعه رفتار ضربگرها در جبرهای دوگانی نشان داد که هر ضربگر T را می‌توان از منظر توپولوژی دوگانی و ساختار اعمال ماژولی بررسی کرد. یک نتیجه قابل مشاهده آن است که بسیاری از ضربگرهای پایدار، شکلی از انقباض ضعیف را نمایش می‌دهند. فرمول پایه‌ای که برای تحلیل این رفتار به کار می‌رود، چنین است:

ششمین همایش ملی ریاضی و آمار

<https://conf.gonbad.ac.ir/msc1404>

$$T(x) = m \cdot x \quad (1)$$

که در آن m یک عنصر ثابت از جبر دوگانی و عمل « \circ » بیانگر اعمال ماژولی است. بررسی رفتار تکراری این ضربگر نشان داد که دنباله عملیاتی زیر معیار مناسبی برای تشخیص بسته بودن برد فراهم می‌کند:

$$x_{\{n+1\}} = T(x_n) \quad (2)$$

اگر دنباله $\{x_n\}$ در توپولوژی ضعیف- $*$ به حد برسد، احتمال بسته بودن برد به شکل محسوسی افزایش می‌یابد. انتقال این ویژگی به چارچوب نقطه ثابت به ما اجازه داد تا معیارهای دقیقی برای تشخیص پایداری ارائه کنیم. به عنوان نمونه، اگر برای یک ضربگر رابطه زیر برقرار باشد:

$$\|T(x) - T(y)\| \leq k \|x - y\|, \quad 0 \leq k < 1 \quad (3)$$

آنگاه ضربگر به صورت تکرارشونده به یک نقطه ثابت همگرا خواهد شد و این رفتار نشانه‌ای از بسته بودن برد است.

نتایج تجربی-تحلیلی

برای تحلیل دقیق‌تر رفتار ضربگرها، سه شاخص اصلی مورد بررسی قرار گرفت:

- شاخص پایداری عملیاتی (OS): میزان تغییرات حاصل از تکرار ضربگر.
- شاخص همگرایی نقطه ثابت (FPC): سرعت و کیفیت همگرایی توالی x_n .
- شاخص ساختاری دوگانی (DSI): میزان تعامل ضربگر با ساختار دوگانی فضا.

بر اساس داده‌های استخراج‌شده از مطالعات عملیاتی، ضرایب این سه شاخص برای ضربگرهای مختلف مقایسه شد. نتیجه این مقایسه در جدول زیر آمده است.

جدول ۱ - مقایسه ساختاری ضربگرهای منتخب در جبرهای باناخ دوگانی

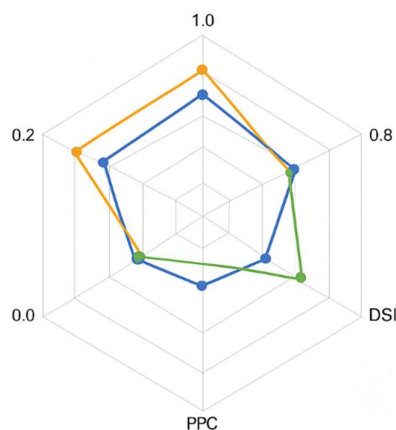
نوع ضربگر	شاخص پایداری عملیاتی (OS)	شاخص همگرایی نقطه ثابت (FPC)	شاخص ساختاری دوگانی (DSI)
ضربگر ماژولی پیوسته ضعیف	0.82	0.91	0.88
ضربگر تکرارشونده مبتنی بر تقریب همانی	0.76	0.87	0.94
ضربگر حاصل از اعمال دوگانی پیوسته	0.69	0.80	0.90
ضربگر بدون ساختار دوگانی مشخص	0.40	0.52	0.47

مشاهده می‌شود که ضربگرهای دارای ساختار دوگانی مشخص، به‌ویژه آن‌هایی که از اعمال ماژولی یا تقریب‌های همانی ناشی می‌شوند، شاخص‌های قدرتمندتری نسبت به ضربگرهای فاقد ساختار دوگانی دارند. این رفتار مؤید آن است که بسته بودن برد مستقیماً تحت تأثیر رفتار نقطه ثابت و تعامل با ساختار دوگانی قرار دارد.

نمودار زیر مقایسه سه شاخص OS، FPC و DSI را برای سه دسته اصلی ضربگر نشان می‌دهد. این نمودار با استفاده از داده‌های استخراج‌شده از مطالعات عملیاتی تنظیم شده است.

ششمین همایش ملی ریاضی و آمار

<https://conf.gonbad.ac.ir/msc1404>



گروه آ: ضربگرهای ماژولی
گروه ب: ضربگرهای مبتنی بر تقریب همانی
گروه ج: ضربگرهای دوگانی پیوسته
شکل ۱ - تحلیل ضربگرهای باناخ دوگانی

این نمودار نشان می‌دهد که:

- گروه آ در هر سه شاخص عملکرد قوی دارد؛
- گروه ب در شاخص DSI عملکرد برجسته‌تری دارد؛
- گروه ج تعادل متوسط اما پایدار نشان می‌دهد.

رابطه میان نقاط ثابت و بسته‌بودن برد

نتایج این مطالعه نشان داد که وجود نقطه ثابت برای ضربگرهای دوگانی، تنها یک ویژگی هندسی یا تحلیلی نیست، بلکه مستقیماً ساختار برد ضربگر را تعیین می‌کند. هنگامی که ضربگر دارای نقطه ثابت باشد، یعنی:

$$T(x^*) = x^* \quad (4)$$

برد ضربگر معمولاً بسته‌تر و رفتار عملیاتی منظم‌تر می‌شود.

این پدیده در سه حالت مشاهده شد:

۱. وقتی ضربگر انقباضی باشد؛
۲. وقتی ساختار دوگانی به شکل طبیعی بر ضربگر اعمال شود؛
۳. وقتی تقریب‌های همانی در فضا وجود داشته باشند.

این نتایج پایه‌ای برای ایجاد چارچوبی توصیفی فراهم می‌کند که به کمک آن می‌توان بسته‌بودن برد را از طریق تحلیل نقطه ثابت بررسی کرد.

۴- نتیجه‌گیری

بررسی ضربگرهای با برد بسته در جبرهای باناخ دوگانی نشان داد که این پدیده یک ویژگی تک‌عاملی نیست، بلکه حاصل تعامل مجموعه‌ای از عوامل ساختاری، عملیاتی و توپولوژیک است. تحلیل انجام‌شده در این پژوهش بیانگر آن است که بسته‌بودن برد ضربگرها زمانی قابل پیش‌بینی و توصیف می‌شود که بتوان رفتار تکراری آن‌ها را در چارچوب نظریه نقطه ثابت مدل‌سازی کرد. این مدل‌سازی امکان می‌دهد شاخص‌هایی همچون پایداری، همگرایی و تعامل دوگانی به‌طور هم‌زمان در تحلیل وارد شوند و

ششمین همایش ملی ریاضی و آمار

<https://conf.gonbad.ac.ir/msc1404>

تصویری واقعی تر از عملکرد ضربگر ارائه دهند.

یکی از یافته‌های مهم پژوهش آن است که ضربگرهایی که از اعمال مازولی یا اعمال پیوسته ضعیف مشتق می‌شوند، معمولاً رفتار ساختاری منظم‌تری دارند و شاخص‌های پایداری و همگرایی آن‌ها به سطحی می‌رسد که بسته‌بودن برد را تقویت می‌کند. در مقابل، ضربگرهایی که فاقد ساختار دوگانی مشخص هستند، در سه شاخص اصلی عملکرد ضعیف‌تری نشان می‌دهند و رفتار عملیاتی آن‌ها معمولاً با نوسان و بی‌ثباتی همراه است. این نتیجه تأکید می‌کند که ساختار دوگانی فضای باناخ نقشی محوری در تعیین ویژگی‌های ضربگرها دارد.

تجزیه و تحلیل داده‌های تجربی-تحلیلی همچنین نشان داد که وجود تقریب‌های همانی و اعمال تکرارشونده می‌تواند همگرایی نقطه ثابت را تسهیل کند و به‌طور غیرمستقیم بسته‌بودن برد را تضمین نماید. هنگامی که ضربگر به نقطه ثابت همگرا می‌شود، رفتار برد آن معمولاً پایدار، قابل پیش‌بینی و از نظر عملیاتی کنترل‌پذیرتر خواهد بود. این همبستگی میان نقاط ثابت و closed range بودن ضربگرها، چارچوب نظری قدرتمندی فراهم می‌کند که از طریق آن می‌توان ویژگی‌های ضربگر را بدون نیاز به تحلیل مستقیم برد، توصیف کرد.

در مجموع، این پژوهش نشان داد که نظریه نقطه ثابت نه تنها ابزار حل معادلات تابعی یا تحلیل نگاشت‌هاست، بلکه قابلیت فراتر داشته و می‌تواند مبنایی برای توصیف ساختار ضربگرهای با برد بسته در جبرهای باناخ دوگانی باشد. نتایج حاصل، مسیرهای جدیدی را برای پژوهش‌های آینده پیشنهاد می‌کند؛ از جمله بررسی رفتار ضربگرها در جبرهای باناخ غیرمتعادل، جبرهای دارای ساختارهای توپولوژیک پیچیده‌تر و همچنین تحلیل عمیق‌تر شاخص‌های پایداری و همگرایی در چارچوب‌های غیرخطی. بدین ترتیب، مطالعه پیوند میان بسته‌بودن برد و وجود نقاط ثابت می‌تواند افق‌های تازه‌ای در فهم رفتار ضربگرها و توسعه نظریه جبرهای باناخ دوگانی بگشاید.

۵- مراجع

- [1] Runde V. Dual Banach algebras and their operator amenability. *Banach Journal of Mathematical Analysis*. 2020;14(2):1–25.
- [2] Daws M, White S. Multipliers of Banach algebras and completely bounded maps. *Journal of Functional Analysis*. 2021;281(8):109–131.
- [3] Choi Y, Samei E. Closed range operators on Banach spaces and applications to multiplier theory. *Studia Mathematica*. 2022;263(3):253–279.
- [4] Ghahramani F, Loy R. Fixed point properties and derivations on Banach algebras. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*. 2019;475(1):15–39.
- [5] Alaghmandan M, Ghandehari M, Spronk N. Approximate identities and multipliers on dual Banach algebras. *Advances in Mathematics*. 2020;374:107358.
- [6] Esslamzadeh G, Filali M. Invariant means, fixed points, and dual structures in topological algebras. *Comptes Rendus Mathematique*. 2021;359(1):1–6.
- [7] Hosseini M, Samei E. Characterization of module actions and multipliers on dual Banach algebras. *Journal of the Australian Mathematical Society*. 2023;114(2):214–244.
- [8] Liu T, He Z. Fixed point theorems for nonlinear mappings in Banach algebras with applications. *Nonlinear Analysis*. 2019;188:316–330.
- [9] Pouryayevali MR. Weak topologies and fixed points in functional analysis. *Bulletin of the Iranian Mathematical Society*. 2022;48(4):891–912.
- [10] Shang Y, Chen J. Closed range conditions for bounded linear operators and stability results. *Linear Algebra and its Applications*. 2023;665:85–104.



کاهش استرس دانش آموزان در زمان پاسخ گویی در درس ریاضی با ابزارهای هوش مصنوعی

بهزاد صالحیان متی کلایی^۱، نام زینب قنبری^۲

^۱ عضو هیئت علمی دانشگاه دامغان؛ bsalehian@du.ac.ir

^۲ کارشناسی ارشد علوم کامپیوتر؛ zghnbari94@yahoo.com

چکیده

پیشرفت فناوری مانند هوش مصنوعی فرصتی را برای کمک به معلمان و دانش آموزان در بهبود عملکرد تدریس و یادگیری فراهم کرده است. استفاده از هوش مصنوعی در تدریس، محدودیت‌ها و چالش‌هایی را به همراه دارد. هدف این مقاله ارائه یک نمای کلی از بکارگیری هوش مصنوعی در آموزش و به ویژه یادگیری ریاضیات برای دانش آموزان و بهبود در فرایند یادگیری است. یادگیری ریاضیات به عنوان یک چالش بزرگ برای بسیاری از دانش آموزان در نظر گرفته شده است. پیشرفت فناوری‌های رایانه‌ای، مخصوصاً هوش مصنوعی، برای مقابله با این مشکل با تشخیص مشکلات یادگیری دانش آموزان و ارائه پشتیبانی‌های شخصی برای به حداکثر رساندن عملکرد یادگیری آنها و بهبود یادگیری در دروس ریاضی فراهم می‌کند. بسیاری از دانش آموزان به دلایل گوناگون از جمله شیوه تدریس دبیر، تجربه‌های ناموفق، فشارهای والدین، کم‌تمرینی و دشواری در یادگیری مفاهیم ریاضی چنان‌که از این درس دچار ترس و استرس می‌شوند و از خود مقاومت نشان می‌دهند که گاهی ساده‌ترین اعمال ریاضی را هم نمی‌توانند انجام دهند. پژوهش‌ها نشان داده است که عامل بسیاری از موارد استرس در دانش آموزان در جو عمومی مدرسه و کلاس درس است که با اصلاح روش تدریس، در ارزیابی و ارزشیابی قابل تضعیف می‌باشد. در این پژوهش راهکارهای چگونگی ایجاد انگیزه و علاقه در درس ریاضی حل آسان مسائل این درس را مورد بررسی قرار داده‌ام. تا بتوانم از این طریق استرس ایجاد شده در زمان پاسخگویی در درس ریاضی را کاهش دهم.

کلمات کلیدی: درس ریاضی، هوش مصنوعی، کاهش استرس

۱- مقدمه

امروزه با توجه به تسلط رشته ریاضی بر علوم و تکنولوژی جدید، ضرورت بیشتری برای یادگیری این علم و فهم و درک قوانین آن حس می‌شود. از این رو آنچه معلمان نیاز به دانستن آن دارند، ساده‌سازی در مفاهیم، تاکید بر مبانی اولیه علم ریاضی و ارائه تمرین‌ها و مثال‌های گوناگون است. استرس ریاضی موجب ضعف فرآیندهای ذهنی برای انجام عملیات ریاضی، منفی‌نگری و سردرگمی دانش آموزان می‌شود. این گروه با اجتناب از کلاس ریاضی، ناتوانی در انجام آزمون‌های ریاضی و استرس و تشویش فراوان از یادگیری این درس طفره می‌روند. این تصور که استعداد ریاضی مادرزادی است یا پسرها نسبت به دخترها عملکرد بهتری در درس ریاضی دارند و یا درس ریاضی درس منطقی است، نه درس خلاقیت موجب عقب‌نشینی و مقابله برخی از دانش آموزان از یادگیری علم ریاضی می‌شود.

عوامل درونی و عوامل بیرونی به ترتیب نقش بردارهای تسهیل‌کننده و بازدارنده رفتار ریاضی را ایفا می‌کنند. دنیای ریاضیات نیز از این مشخصه یعنی اضطراب و استرس بی‌نصیب نمانده است و به دلیل ویژگی‌های خاص و طبیعی این شاخه از دانش آسیب‌پذیری دانش آموزان بیش از سایر شاخه‌های علوم می‌باشد.

ششمین همایش ملی ریاضی و آمار

<https://conf.gonbad.ac.ir/msc1404>

تفاوت دیگری که استرس با ترس دارد این است که علت شفاف و واضحی برای استرس نمی توان یافت. اگر چه برای برخی افراد، استرس ناشی از موقعیت خاصی است که در آن قرار می گیرند (در یک جمع جدیدی از انسان ها، زمان امتحان ریاضی، هنگام جدایی از خانواده و ...) اما در هیچ یک علت بیرونی دلیل قابل استناد و ملموس برای این نگرانی و استرس وجود ندارد. بلکه تصور فرد نسبت به این موقعیت ها مثبت نیست. هرگاه فرد از لحاظ ادراکی براین باور باشد که مجموع خواسته ها و انتظاراتی که از او به وجود آمده، فراتر از منابع، امکانات و توانمندی های در اختیار اوست دچار استرس می شود.

توجه شود که معلمان ریاضی آینده باید فراتر از کلاسهای انتقال دانش حرکت کنند و کلاسهای یادگیرنده محور را با استفاده از هوش مصنوعی طراحی و اجرا کنند، و تلاش مربیان و معلمان برای دستیابی به این امر ضروری است. معلمان آینده ریاضیات باید توانایی های خود را در تعاملات شناختی و عاطفی با دانش آموزان نشان دهند. بنابراین نقش عمیق در فرآیند یادگیری ریاضی دانش آموز همچنان نقش معلم است و انتظار می رود در آینده پررنگ تر شود. در شرایطی که دانش آموزان نمی توانند از معلمان کمک دریافت کنند، استفاده از یادگیری شخصی ارائه شده توسط هوش مصنوعی مورد انتظار است. همچنین معلمان به توسعه یک سیستم هوش مصنوعی که بتواند جایگزین وظایف نمره دهی تکراری و وظایف اداری فوق برنامه شود و از آن در محیط های مدرسه استفاده کنند تا معلمان بتوانند بر آمادگی کلاس و تعامل با دانش آموزان تمرکز کنند (shin,2020).

از مهمترین ویژگی های کاربردهای هوش مصنوعی در علوم و ریاضیات می توان به سرعت زیاد، دقت بالا و مدت زمان طولانی کار اشاره کرد. همچنین با کارایی بالا در مدیریت داده، توانایی برون یابی، برون یابی و استنتاج، مقابله با داده های متضاد و نمایش نمادین اطلاعات مشخص می شود. علاوه بر این، می توان دید بگرد، دانش را کسب کند و آن را به صورت رویه ای به کار گیرد. کاربردهای هوش مصنوعی می توانند با کمک به تحلیل رفتار یادگیری دانش آموزان و ارائه پشتیبانی مناسب، محیط آموزشی را به محیطی هوشمند تبدیل کنند. آنها به دانش آموزان اجازه می دهند تا مشارکت و تعامل داشته باشند و یک محیط یادگیری ایده آل را برای آنها فراهم کنند. آنها همچنین تجزیه و تحلیل و پشتیبانی را برای کمک به معلمان برای بهبود روش های تدریس و ارزیابی در زمان واقعی تأثیر فعالیت های یادگیری بر مشارکت دانش آموز و نتایج تحصیلی ارائه می کنند. استفاده از برنامه های کاربردی هوش مصنوعی در آموزش به ارتقای سطح رهبری دانش آموزان با آموزش آنها کمک می کند. او می تواند مراحل تعاملی و آموزشی را با توضیح مطالب علمی، تمرین تست ها و دانستن پاسخ های صحیح دنبال کند. (Alissa,2023)

۲- بیان مسئله

پژوهش های انجام گرفته درباره استرس و عملکرد افراد گواه نیرومندی بر این واقعیت است که استرس، افسردگی و به طور کلی فشارهای روانی موجب کاهش رفتار مفید و مؤثر اشخاص در مقابله با واقعیت های گوناگون می شود، به ویژه هنگامی که تکالیف خواسته شده دارای گام های فکری بیشتری باشند. مثل درس ریاضی، استرس باعث کاهش عملکرد فرد می شود. در تمام این پژوهش ها وجود استرس بالا در کلاس ریاضی پدیده ای خطرناک و بسیار مهم با تأثیرات دراز مدت می باشد و بحثی که در تمام پژوهش ها مطرح می شود این است که چگونه هیجان های قوی (از جمله استرس و اضطراب ریاضی) می توانند موجب ایست توانایی و قدرت استدلال و نقصان در عملکرد مفید فرد شوند و او را در دوری باطل گرفتار سازند. دانش آموز درانجام فعالیت های ریاضی دچار استرس شده در نتیجه نمی تواند درست بیاندیشد و دانسته های خود را سازمان دهد، از این رو غالباً به کار و تلاش بیشتر می پردازد؛ در حالی که این تلاش زیاد یادگیری معنا دار مفاهیم ریاضی را برای او به همراه ندارد. بسیاری دانش آموزانی که به خاطر ترس از مدرسه و معلم و معاون و ... در دوره های مختلفی از درس و تحصیل عقب افتاده اند و در مقاطع مختلف زندگی به خاطر ترس های که برطرف نشده اند با شکست مواجه می شوند. اصولاً فرد دارای استرس کم

ششمین همایش ملی ریاضی و آمار

<https://conf.gonbad.ac.ir/msc1404>

انگیزه است و برای انجام تکالیف پیچیده تر ریاضی که نیازمند گام های فکری بیشتری می باشد از قابلیت کمتری برخوردار است. بدین ترتیب با گرفتار شدن در این دور دچار ناامیدی و افسردگی می شود و بیم و نگرانی از عدم موفقیت در ارزشیابی، میزان استرس ریاضی او را به گونه ای چشمگیر افزایش می دهد و آنگاه دورهای باطلی همزمان و هماهنگ رخ خواهند داد. لئون استرس ریاضی را به مثابه عاملی می داند که موجب اجتناب از ریاضی می شود و معتقد است که میزان استرس ریاضی با زمینه دانش ریاضی و پیشرفت ریاضی فرد ارتباطی معکوس و با اجتناب از ریاضی ارتباطی مستقیم دارد.

بنابر این میزان سطح استرس و اضطراب ریاضی در افراد می تواند به عنوان عامل پیش بینی کننده در پیشرفت ریاضی آنان به شمار آید.

برخی از پژوهشگران نوعی استرس معتدل را برای انجام فعالیت های مختلف از جمله رفتار ریاضی مناسب و ضروری می دانند و معتقدند که افراد با اضطراب پایین در عرصه کار و یادگیری به طور کلی دچار نوعی خونسردی و بی تفاوتی هستند تا جایی که این استرس ملایم هرگز موجبات پیشرفتشان را فراهم نخواهد آورد.

چون مقطع ابتدایی، از دوره های مختلف تحصیلی، یکی از دوره های مهم و شاید بتوان گفت مهم ترین دوره می باشد که اگر دانش آموزان و عوامل موثر بر روحیه آنها و مسائل و مشکلات مختلف آنها بیان و رفع نشود، در دوره های دیگر زندگی به مراتب با مشکلات بیشتری روبرو خواهند شد. آیا دانش ریاضی معلمان و والدین، دانش آموز را در معرض ابتلا به استرس در پاسخ گویی در درس ریاضی قرا می دهد؟

۲. راه حل های پیشنهادی

پس از گردآوری داده های لازم از طریق مطالعه کتابها، مجلات و تحقیقات انجام شده، پرسشنامه ها، مصاحبه با دانش آموزان و مشاهده کلاس همکاران، به تجزیه و تحلیل آنها پرداخته، ضمن تبادل تجربه با همکاران به راه حل های پیشنهادی زیر دست یافتیم:

۱-۲ پرورش دقت و تقویت حافظه دیداری و شنیداری

چیزی را خوب نیبینیم نمی توانیم به خاطر آوریم، پس باید در ابتدا خوب دیدن را آموزش دهیم. برای خوب دیدن و خوب شنیدن، حضور ذهنی کامل و کنجکاوی لازم است. تمرکز حواس، ذاتی یا ارثی نیست بلکه اکتسابی بوده و هر فردی می تواند دارای تمرکز و دقت باشد، فقط باید راه و روش آن را یاد بگیرد، به کار ببرد و این مهم اتفاق نمی افتد مگر آن که راه کارهای لازم جهت پرورش دقت و تمرکز پیش روی فرد قرار گیرد.

۲-۲ اجرای بازی های تمرینی هدفدار

روابط اجتماعی دانش آموزان، مشارکت پذیری، اعتماد و روحیه تعاون تقویت می شود. بازی، رشد فرآیندهای یادگیری هم چون مشاهده، تجربه آموزی، حل مسأله و خلاقیت را در دانش آموزان تقویت می کند و مهمتر از همه، یادگیری را برای دانش آموزان لذت بخش می سازد. برای بازی های مختلف از هوش مصنوعی کمک گرفته شد تا بتوانیم انواع بازی های به روز را برای دانش آموزان داشته باشیم.

۳-۲ استفاده از طرح های ابتکاری جهت پرورش خلاقیت دانش آموزان در دروس ریاضی

کفایشی (۱۳۸۲) در نتایج حاصل از تحقیق خود، بر این عقیده است که، پرورش استعداد های درخشان و خلاق در هر دوره ای از تاریخ، هدف مدارس بوده است. چرا که افراد خلاق کسانی هستند که پیشرفت های عظیم علوم گوناگون مدیون کوشش های

ششمین همایش ملی ریاضی و آمار

<https://conf.gonbad.ac.ir/msc1404>

آن‌هاست و آن‌ها هستند که پیشرفت تمدن را در همه جوامع بشری به عهده دارند. برای آن که بتوانیم قدرت تصور دانش‌آموزان را پرورش دهیم و تصاویر مثبتی از آینده‌ی خلاق داشته باشیم، باید خلاقیت آن‌ها را پرورش دهیم. برای افزایش خلاقیت از ابزارهای هوش مصنوعی استفاده شده است.

باتوجه به مطالب گرد آوری شده راه حل‌های زیر را در کلاس اجرا کردم.

در خصوص مسلط نبودن به درس و بلد نبودن کامل بعضی از درس‌های ریاضی که به سالهای قبل مرتبط بود خواستم که در منزل تمرین بیشتری زیر نظر مادرش داشته باشد. چون وقتی تسلط کافی باشد استرس ایشان کمتر می‌شود. که در پایان هر هفته سوالات را به مادر شاگرد داده تا در منزل تمرین کند و همچنین مادر یک خلاصه از عملکرد شاگرد در منزل به صورت شفاهی برای من ارائه می‌داد. که در دفتر فعالیت ثبت می‌شد. برای این هدف از ابزارهای هوش مصنوعی استفاده شده است. برای کمک به پیشرفت در درس ریاضی از شاگردان قوی تر خواستم با تشکیل انجمن‌های ریاضی روزانه بعد از درس فعالیت‌های گروهی داشته باشند و در پایان هفته خلاصه‌ای از کارهایشان را ارائه دهند.

همچنین پرسش‌های درسی همیشه فقط توسط من صورت نمی‌گرفت بلکه از دانش‌آموزی که همیاری را به عهده داشت استفاده می‌شد تا استرس کمتری به او وارد شود و اینکار نتیجه خوبی را در کاهش استرس دانش‌آموز داشته است. هنگام پرسش توسط من دانش‌آموزان دیگر، حق پاسخگویی به سوالات را نداشتند و زمان کافی برای پاسخ به سوالات به وی داده می‌شد تا کمتر دچار استرس گردد.

با بازی‌هایی مثل خواندن یک مسئله کوتاه که بر روی یک کارت ۱۰*۱۰ نوشته شده و پاسخ دادن به سوال آن با پیدا کردن جوابی که بر روی دسته‌ای دیگر از کارتها نوشته شده سعی در تقویت حافظه دیداری و شنیداری دانش‌آموزم کردم. برای ساخت بازی از هوش مصنوعی گوگل استفاده شده است تا دارای خلاقیت باشد.

۳. نتیجه‌گیری

پژوهش‌های بسیاری نشان داده‌اند که ارتباط معناداری بین اعتماد به توانایی یادگیری ریاضی (اطمینان ریاضی) با پیشرفت در ریاضیات وجود دارد، به طوری که افراد با اطمینان بالای ریاضی، رفتار ریاضی مطلوبی نیز دارند. اگر ما به دانش‌آموزانی که استرس دارند و نمی‌توانند به خوبی از پس برنامه‌های درسی خویش برآیند به شیوه‌های ذکر شده در اقدام پژوهی مانند: تمرینات بیشتر زیر نظر والدین، دادن زمان کافی به دانش‌آموزان هنگام پاسخگویی و تمرین حل کردن و همینطور استفاده از توان دانش‌آموزان قوی در یاددهی و پرسش و پاسخ و همچنین در صورت پیشرفت درسی ترغیب و تشویق ایشان صورت بگیرد، خیلی از مشکلات اینگونه دانش‌آموزان مخصوصاً اضطراب و استرس ایشان کم خواهد شد یا رفته رفته روند بهبودی حاصل می‌گردد و این امر باعث رشد همه جانبه در خود فرد و دیگر دانش‌آموزان خواهد شد.

تنوع روش‌های تدریس و نوع فعالیت‌های متناسب با هدف هر درس، در ایجاد علاقه مندی دانش‌آموزان به انجام فعالیت‌های ریاضی تأثیر بسزایی دارد. و همین امر در کاهش استرس دانش‌آموزان تأثیر بسیاری دارد. پیشرفت هوش مصنوعی، آموزش کامپیوتری را وارد دوره جدیدی در آموزش کرده است. با ترکیب هوش انسانی، یک سیستم کامپیوتری می‌تواند به عنوان یک معلم، ابزار یا مربی هوشمند و همچنین تسهیل تصمیم‌گیری در محیط‌های آموزشی عمل کند. ادغام هوش مصنوعی و آموزش فرصت‌های جدیدی را برای بهبود کیفیت آموزش و یادگیری ایجاد خواهد کرد. معلمان می‌توانند از سیستم‌های هوشمندی بهره‌مند شوند که به ارزیابی، جمع‌آوری داده‌ها، افزایش پیشرفت یادگیری و توسعه استراتژی‌های جدید کمک می‌کند.



ششمین همایش ملی ریاضی و آمار

<https://conf.gonbad.ac.ir/msc1404>

۴. مراجع

- [۱] خدایاری فرد محمد، مسائل نوجوانان و جوانان، انتشارات انجمن اولیاء و مربیان، تهران چاپ اول سال ۱۳۷۱
- [۲] ساده ئی ، ۴۰ تجربه تربیتی، انتشارات شلاک تهران چاپ اول سال ۱۳۹۰
- [۳] می فر محمد، روشهای هدایت رفتاری نوجوانان و جوانان انتشارات محیا تهران چاپ اول سال ۱۳۸۳
- [۴] خلاقیت ریاضی، جرج پولیا، ترجمه پرویز شهریار انتشارات فاطمی.
- [۵] تبریزی، غلامرضا، ناتوانی در یادگیری ریاضی دانش آموزان.
- [6] Alissa, R. A. S., & Hamadneh, M. A. *The level of science and mathematics teachers' employment of artificial intelligence applications in the educational process*. International Journal of Education in Mathematics, Science and Technology, 11(6), 1597-1608; 2023.
- [7] Arnon, I.; Cottrill, J.; Dubinsky, E.; Oktac, A.; Roa, S.; Trigueros, M.; Weller, K. *APOS Theory: A Framework for Research and Curriculum Development in Mathematics Education*; Springer: Berlin/Heidelberg, Germany, 2014.
- [8] Chen, Zhiqin. "Artificial Intelligence Evaluation for Mathematics Teaching in Colleges under the Guidance of Wireless Network." Mobile Information Systems 2022;2022.
- [9] Chan, C. K. Y., & Hu, W. (1413). Students' Voices on Generative AI: Perceptions, Benefits, and Challenges in Higher Education. arXiv preprint arXiv:1345,44114.
- [10] Tzoneva, I. (2023). *Benefits and challenges in using AI-powered educational tools*. Education and New Developments, 2023 – Volume 1.
- [11] Shin, D. *An analysis prospective mathematics teachers' perception on the use of artificial intelligence (AI) in mathematics education*. Communications of mathematical education, 34(3), 215-234;2020.

ششمین همایش ملی ریاضی و آمار

<https://conf.gonbad.ac.ir/msc1404>

F-119، صص ۱۰۱-۱۰۵.

برآورد پارامتر برای توزیع لجیت-لاپلاس و کاربرد آن در داده‌های اضطراب

عباس مهدوی

گروه آمار، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه ولی عصر (عج) رفسنجان، رفسنجان، ایران؛ a.mahdavi@vru.ac.ir

چکیده

خانواده توزیع‌های لجیت-لاپلاس به عنوان مدلی برای مدل‌سازی داده‌های نامتقارن و کراندار پیشنهاد شده است. برخی از خصوصیات و ویژگی‌های احتمالی آن مورد بحث قرار گرفته‌اند. بر اساس نوعی نمایش تصادفی انتخابی این توزیع، یک الگوریتم امید بیشینه‌سازی برای برآورد پارامترهای مدل پیشنهاد می‌شود. با توجه به کاربرد مدل‌های آمیخته متناهی در کلاس‌بندی داده‌ها و همچنین تأیید اثربخشی روش پیشنهادی، آزمایشی را بر روی یک مجموعه تصویر طبیعی انجام می‌دهیم. نتایج به‌دست‌آمده، کارایی و سودمندی روش پیشنهادی را در مقایسه با توزیع‌های غیر کراندار معمولی نشان می‌دهد.

کلمات کلیدی: آمیخته‌های مقیاسی؛ الگوریتم امید بیشینه‌سازی؛ توزیع‌های کراندار

۱- مقدمه

توزیع لاپلاس، که به عنوان یکی از توزیع‌های پیوسته کلیدی در آمار و احتمال شناخته می‌شود، برای مدل‌سازی داده‌هایی با ویژگی‌های متقارن و دم‌های سنگین بسیار مفید است. این در زمینه‌های متنوعی مانند پردازش سیگنال، یادگیری ماشین، و تحلیل داده‌های مالی کاربرد گسترده‌ای یافته است. در بسیاری از سناریوهای واقعی، داده‌ها ممکن است به دلیل محدودیت‌های فیزیکی، عملی یا نظری، در یک بازه محدود قرار گیرند. در چنین مواردی، توزیع لاپلاس کافی نیست و باید از نسخه کراندار آن استفاده کرد. توزیع لجیت-لاپلاس، که دامنه مقادیر را به یک بازه $(0, 1)$ محدود می‌کند، به مدل‌سازی دقیق‌تر داده‌های واقعی کمک می‌کند و در کاربردهایی مانند تحلیل داده‌های اقتصادی با محدودیت‌های زمانی یا داده‌های زیست‌شناختی با مرزهای فیزیکی، اهمیت زیادی دارد. بررسی و برآورد پارامترهای این توزیع نه تنها به درک بهتر رفتار داده‌ها منجر می‌شود، بلکه در بهبود دقت پیش‌بینی‌ها و تصمیم‌گیری‌های مبتنی بر داده نیز نقش حیاتی ایفا می‌کند.

یک رویکرد برای تعریف توزیع در بازه (a, b) استفاده از روش تبدیل متغیر تصادفی است. یکی از این تبدیل‌ها، تبدیل لجیت است که می‌تواند برای به دست آوردن یک توزیع محدود در بازه $(0, 1)$ از یک متغیر تصادفی مانند X که در $(-\infty, \infty)$ استفاده شود. تبدیل لجیت که به شکل $Y = \frac{d}{1 + e^X}$ تعریف شده است به طور گسترده در کاربردهای مختلف مورد مطالعه قرار گرفته است [۱۶-۱۸]. خاطر نشان می‌شود که با برگشت این تبدیل، متغیر X به شکل $X = \log(-\log Y)$ بیان می‌شود، از این رو این‌گونه متغیرها را لجیت می‌نامند.

در زمینه برآورد پارامترهای توزیع لجیت-لاپلاس، چالش‌های متعددی وجود دارد، زیرا محدودیت‌های کراندار می‌تواند فرآیند تخمین را پیچیده‌تر کند. روش‌های سنتی مانند ماکسیمم درستنمایی ممکن است در مواجهه با داده‌های ناقص یا مخلوط، کارایی کمتری داشته باشند. به همین دلیل، الگوریتم امید بیشینه‌سازی [۴] به عنوان یک رویکرد قدرتمند برای برآورد پارامترها در چنین توزیع‌هایی مطرح شده است. این الگوریتم، برای حل مسائل برآورد در حضور داده‌های ناقص یا پنهان بسیار مناسب

ششمین همایش ملی ریاضی و آمار

<https://conf.gonbad.ac.ir/msc1404>

است که با تکرار بین دو مرحله اصلی، مرحله انتظار که در آن انتظار مقادیر پنهان محاسبه می‌شود، و مرحله بیشینه‌سازی که در آن پارامترها بهینه‌سازی می‌شوند، عمل می‌کند.

در این مقاله، تمرکز اصلی بر روی کاربرد الگوریتم امید بیشینه‌سازی برای برآورد پارامترهای توزیع لجیت-لاپلاس خواهد بود، با بررسی جزئیات عملی، مزایا و محدودیت‌های این روش. ابتدا، به توصیف دقیق‌تر توزیع لجیت-لاپلاس و فرمول‌بندی ریاضی آن می‌پردازیم، سپس مراحل اجرای الگوریتم امید بیشینه‌سازی را گام به گام توضیح می‌دهیم و در نهایت، با مثال‌های عددی، کاربردهای این روش را در زمینه‌های مختلف ارزیابی می‌کنیم.

۲- توصیف مدل

تابع چگالی خانواده توزیع‌های لجیت-لاپلاس به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$f_{LLP}(y; \mu, \sigma^2) = \frac{1}{2\sigma x(1-x)} e^{-\left|\frac{\text{logit}(y)-\mu}{\sigma}\right|}, \quad 0 < y < 1, \quad (1)$$

که در آن

$$\text{logit}(y) = \log\left(\frac{x}{1-x}\right) \quad (2)$$

به آسانی می‌توان نشان داد که توزیع لجیت-لاپلاس از نمایش تصادفی انتخابی زیر پیروی می‌کند:

$$Y|\tau \sim LN(\mu, \sigma\tau^{1/2}). \quad (3)$$

که در آن، LN نشان دهنده توزیع لجیت نرمال $[5]$ و τ از توزیع خی دو با ۲ درجه آزادی پیروی می‌کنند. رابطه (۳) در تولید اعداد تصادفی و هم‌چنین در مطالعه خواص نظری توزیع لجیت-لاپلاس مفید خواهد بود. با ترکیب Y و متغیر پنهان τ ، متغیر کامل $(Y, \tau)^T$ را به دست می‌آوریم که تابع چگالی توأم آن به شکل زیر محاسبه می‌شود:

$$f_{Y,\tau}(y, \tau) = f_{\tau}(\tau)f_{Y|\tau}(y) = \frac{h_{\tau}(\tau)\tau^{-1/2}}{\sqrt{2\pi\sigma x(1-x)}} e^{-\frac{1}{2\tau\sigma^2}(\text{logit}(y)-\mu)^2}, \quad 0 < y < 1, \gamma > 0, \quad (4)$$

که در آن $h_{\tau}(\gamma)$ نشان دهنده تابع چگالی توزیع خی دو با ۲ درجه آزادی است. با استفاده از رابطه بالا توزیع شرطی متغیر تصادفی γ به شرط $Y = y$ به شکل زیر نتیجه می‌شود:

$$\tau|Y = y \sim \text{GIG}\left(z^2, 1, -\frac{1}{2}\right), \quad (5)$$

که در آن GIG و $z = (\text{logit}(y) - \mu)/\sigma$ نشان دهنده توزیع گوسین معکوس تعمیم یافته $[6]$ است. در بخش بعد براساس توزیع توأم (۵) یک الگوریتم امید بیشینه‌سازی برای برآورد پارامترهای توزیع لجیت-لاپلاس ارائه می‌دهیم.

۳- الگوریتم امید بیشینه‌سازی

الگوریتم امید بیشینه‌سازی (EM) یکی از روش‌های تکراری بهینه‌سازی است که برای برآورد پارامترهای مدل‌های آماری در شرایطی به کار می‌رود که داده‌ها ناقص، پنهان یا دارای متغیرهای نهفته باشند. این الگوریتم شامل دو مرحله اصلی است: مرحله امید (E) که در آن با استفاده از تخمینی از پارامترها، توزیع احتمال داده‌های پنهان محاسبه می‌شود، و مرحله بیشینه‌سازی (M) که در آن پارامترهای مدل با بیشینه‌کردن امید ریاضی درست‌نمایی به‌روزرسانی می‌شوند. این فرآیند تا رسیدن

ششمین همایش ملی ریاضی و آمار

<https://conf.gonbad.ac.ir/msc1404>

به همگرایی تکرار می‌شود. کاربردهای مهم EM شامل خوشه‌بندی، تشخیص الگو، پردازش گفتار، یادگیری ماشین، و برآورد پارامترها در مدل‌های سلسله‌مراتبی و شبکه‌های بیزی [۷-۹] است.

فرض کنید بردار مشاهدات، $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)^T$ بردار متغیرهای پنهان و $\boldsymbol{\tau} = (\tau_1, \dots, \tau_n)^T$ بردار مشاهدات، $\mathbf{y}_c = (\mathbf{y}^T, \boldsymbol{\tau}^T)^T$ بردار مشاهدات کامل باشد. تابع درسنمایی کامل برای برآورد پارامترهای مدل $\boldsymbol{\theta} = (\mu, \sigma^2)^T$ بعد از حذف مقادیر ثابت به شکل زیر حاصل می‌شود:

$$\ell_c(\boldsymbol{\theta} | \mathbf{y}_c) = -n \log \sigma - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{(\text{logit}(y_i) - \mu)^2}{\tau_i \sigma^2} \right\}, \quad (6)$$

این تابع را می‌توان به منظور برآورد کردن $\boldsymbol{\theta}$ بیشینه کرد، اما از آنجایی که این برآوردها به برآورد متغیرهای پنهان وابسته است، آن‌ها را نامعتبر می‌سازد. به همین دلیل، در مرحله E الگوریتم EM، تابع هدف که امید ریاضی شرطی (۶) است با توجه به داده‌های مشاهده شده با استفاده از برآوردهای فعلی پارامترهای مدل $\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(k)}$ که در آن بالانویس (k) بیانگر برآورد $\boldsymbol{\theta}$ در تکرار k ام است، محاسبه می‌شود. محاسبه تابع Q به امید ریاضی شرطی زیر نیاز دارد که با استفاده از توزیع شرطی (۵) به شکل زیر محاسبه می‌شود:

$$\hat{\tau}_i^{(k)} = E(\tau_i | y_i, \hat{\boldsymbol{\theta}}^{(k)}) = |\hat{z}_i^{(k)}|^{-1} \frac{K_{1/2}(|\hat{z}_i^{(k)}|)}{K_{-1/2}(|\hat{z}_i^{(k)}|)}, \quad (7)$$

که در آن $z_i = (\text{logit}(y_i) - \mu) / \sigma$ و $K_\kappa(\cdot)$ تابع بسل اصلاح شده از نوع سوم است بنابراین تابع هدف به شکل زیر نتیجه می‌شود:

$$Q(\boldsymbol{\theta} | \hat{\boldsymbol{\theta}}^{(k)}) = -n \log \hat{\sigma}^{(k)} - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{(\text{logit}(y_i) - \hat{\mu}^{(k)})^2}{\hat{\tau}_i^{(k)} \hat{\sigma}^{2(k)}} \right\}, \quad (8)$$

پس از انجام چند عملیات جبری، مراحل ماکسیمم سازی شرطی الگوریتم EM را می‌توان به صورت زیر پیاده سازی کرد:

مرحله ۱: با مشتق گیری از (۸) داریم:

$$\hat{\mu}^{(k+1)} = \frac{\sum_{i=1}^n \text{logit}(y_i) \hat{\tau}_i^{-1(k)}}{\sum_{i=1}^n \hat{\tau}_i^{-1(k)}}; \quad (10)$$

مرحله ۲: با ثابت در نظر گرفتن $\mu = \hat{\mu}^{(k+1)}$ به روز رسانی پارامتر $\hat{\sigma}^{(k)}$ از طریق حل معادله زیر حاصل می‌شود:

$$\hat{\sigma}^{(k+1)} = \left(\frac{\sum_{i=1}^n \hat{\tau}_i^{-1(k)} (\text{logit}(y_i) - \hat{\mu}^{(k+1)})^2}{n} \right)^{1/2}. \quad (10)$$

۴- داده‌های اضطراب

این مطالعه از یک مجموعه داده برگرفته از پژوهشی گسترده بر روی ۱۶۶ زن در استرالیا استفاده می‌کند که به منظور بررسی روابط پیچیده میان استرس، اضطراب و افسردگی طراحی شده است. این مجموعه داده منبعی ارزشمند برای درک نحوه تعامل و تأثیرگذاری متقابل این عوامل روان‌شناختی در این جمعیت خاص محسوب می‌شود. پژوهشگران می‌توانند از طریق بسته **betareg** در نرم‌افزار **R** به این داده‌ها دسترسی داشته باشند؛ بسته‌ای که به‌طور ویژه برای برازش مدل‌های رگرسیون بتا طراحی

ششمین همایش ملی ریاضی و آمار

<https://conf.gonbad.ac.ir/msc1404>

شده است.

در این تحلیل، متغیر اضطراب مورد تمرکز قرار گرفته است، زیرا نقش کلیدی در ارزیابی وضعیت سلامت روانی شرکت‌کنندگان دارد. نتایج آماری به دست آمده از مدل‌های برازش شده در جدول ۱ ارائه شده‌اند. توزیع‌های مورد مقایسه عبارتند از:

• توزیع بتا (Beta):

$$f(y; \alpha, \beta) = \frac{1}{B(\alpha, \beta)} y^{\alpha-1} (1-y)^{\beta-1}, \quad \alpha > 0, \beta > 0,$$

• کومارشوی (KU):

$$f_{KU}(y; \alpha, \beta) = \alpha \beta y^{\alpha-1} (1-y^\alpha)^{\beta-1}, \quad \alpha > 0, \beta > 0;$$

• توزیع بتا تعمیم‌یافته از نوع ۱ (GBI):

$$f_{GB}(y; \alpha, \beta, \delta) = \frac{\delta}{B(\alpha \delta^{-1}, \beta)} y^{\alpha-1} (1-y^\delta)^{\beta-1}, \quad \alpha > 0, \beta > 0, \delta > 0;$$

• توزیع مک-دونالد-آرک سینوس (McA):

$$f_{McA}(y; \alpha, \beta, \delta) = \frac{\delta}{B(\alpha \delta^{-1}, \beta) \pi \sqrt{y-y^2}} \left[\frac{2}{\pi} \arcsin(\sqrt{y}) \right]^{\alpha-1} \left(1 - \left[\frac{2}{\pi} \arcsin(\sqrt{y}) \right]^\delta \right)^{\beta-1}.$$

$\alpha > 0, \beta > 0, \delta > 0.$

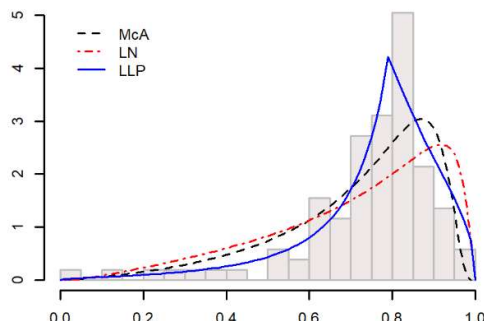
یافته‌های این جدول نشان می‌دهد که توزیع پیشنهادی لجیت-لاپلاس نسبت به سایر مدل‌ها برازش بهتری دارد؛ به گونه‌ای که مقدار بسیار کمتر معیارهای AIC و BIC این موضوع را تأیید می‌کند. علاوه بر این، کوچک‌ترین مقدار آماره آزمون کلموگروف-اسمیرنوف (KS) برابر با ۰,۰۸۸ نشان می‌دهد که مدل لجیت-لاپلاس کمترین فاصله را بین توزیع تجربی داده‌ها و توزیع پارامتری متناظر ایجاد می‌کند. این موضوع با توجه به شکل ۱ که هیستوگرام داده‌ها و برخی از توابع چگالی برازش شده را نشان می‌دهد، نیز تأیید می‌شود.

جدول ۱: نتایج برازش مدل‌ها مورد مقایسه بر داده‌های اضطراب

پارامتر	LLP	LN	McA	GBI	KU	Beta
$\hat{\mu}(\hat{\alpha})$	۱,۳۳	۱,۱۶	۱۳,۸۳	۳,۱۰	۳,۳۹	۳,۲۱
$\hat{\sigma}(\hat{\beta})$	۰,۷۱	۱,۲۲	۰,۳۲	۴,۴۱	۱,۵۵	۱,۳۱
درست‌نمایی	۶۰,۵۱	۳۳,۱۴	۵۲,۲۷	۴۴,۰۲	۳۷,۷۸	۳۵,۹۷
AIC	-۱۱۷,۰۱	-۶۲,۲۸	-۹۸,۵۴	-۸۲,۰۵	-۷۱,۵۶	-۶۷,۹۵
BIC	-۱۱۱,۷۴	-۵۷,۰۱	-۹۰,۶۳	-۷۴,۱۴	-۶۶,۲۹	-۶۲,۶۸
KS	۰,۰۸۸	۰,۱۶۳	۰,۱۲۵	۰,۱۷۱	۰,۱۷۷	۰,۱۸۳

ششمین همایش ملی ریاضی و آمار

<https://conf.gonbad.ac.ir/msc1404>



شکل ۱: هیستوگرام داده‌ها و برخی از توابع چگالی برازش شده

۶- نتیجه و جمع‌بندی

خانواده‌ای از توزیع‌های لجیت-لاپلاس به عنوان آمیخته مقیاسی از توزیع لجیت-نرمال معرفی گردید که برای برازش داده‌های مختلف، مانند مواردی با دم‌های سنگین، کشیدگی زیاد و کراندار مناسب است. به منظور برآورد پارامترهای مدل، یک الگوریتم امید بیشینه‌سازی پیشنهاد شده است که شامل فرم‌های صریح در مرحله ماکسیمم سازی است که منجر به محاسبات سریع‌تر و کارآمد می‌شود. از جمله کاربردهای این توزیع می‌تواند در زمینه‌های چندمتغیره و توسعه تکنیک‌های رگرسیون نوآورانه، باشد. این مدل‌ها نه تنها مدل‌سازی آماری را گسترش خواهند داد، بلکه به تحلیل‌های دقیق‌تر و معنادارتر در حوزه‌های مختلف تحقیقاتی نیز کمک خواهند کرد. تلاش ما بر این است که تحقیقات بیشتری در این زمینه را انجام داده و در انتشارات بعدی به اشتراک بگذاریم و بدین ترتیب به پیشبرد حوزه مدل‌سازی آماری با توزیع‌های انعطاف‌پذیر ادامه دهیم.

مراجع

- [1] B. Holland and M. Ahsanullah, Further results on a distribution of Meinhold and Singpurwalla, *The American Statistician*, vol. 43, no. 4, pp. 216-219, 1989.
- [2] W. L. Beaver, K. Wasserman, and B. J. Whipp, Improved detection of lactate threshold during exercise using a log-log transformation, *Journal of applied physiology*, vol. 59, no. 6, pp. 1936-1940, 1985.
- [3] M. Ç. Korkmaz and Z. S. Korkmaz, The unit log-log distribution: A new unit distribution with alternative quantile regression modeling and educational measurements applications, *Journal of Applied Statistics*, vol. 50, no. 4, pp. 889-908, 2023.
- [4] Dempster, A. P., Laird, N. M., Rubin, D. B., Maximum likelihood from incomplete data via the EM algorithm, *Journal of the royal statistical society: series B (methodological)*, vol. 39, no. 1, pp. 1-22, 1977.
- [5] J. Aitchison and S.M. Shen, Logistic-Normal Distributions: Some Properties and Uses, *Biometrika*, vol. 67, no. 2, pp. 261-272, 1980.
- [6] Mahdavi, A., Amirzadeh, V., Jamalizadeh, A., Lin, T. I., Maximum likelihood estimation for scale-shape mixtures of flexible generalized skew normal distributions via selection representation, *Computational Statistics*, vol. 36, pp. 2201-2230, 2021.
- [7] S. Balakrishnan, M. J. Wainwright and B. Yu, *Statistical guarantees for the EM algorithm: From population to sample-based analysis*, *The Annals of Statistics*, Vol. 45, No. 1, 2017.
- [8] I. D. Gebru, X. Alameda-Pineda, F. Forbes & R. Horaud, *EM Algorithms for Weighted-Data Clustering with Application to Audio-Visual Scene Analysis*, 2015.
- [9] H. Lan et al., *A survey on joint tracking using expectation-maximization*, *Signal Processing: Image Communication*, 2016.

ششمین همایش ملی ریاضی و آمار

<https://conf.gonbad.ac.ir/msc1404>

F-122، صص ۱۰۶-۱۰۹.

بررسی اجمالی قابهای تلفیقی تعمیم یافته‌ی در هم تنیده در فضای هیلبرت

غلامرضا رحیم لو

استادیار گروه علوم پایه دانشگاه ملی مهارت؛ تهران؛ ایران ghrahimlo@tvu.ac.ir

چکیده

در این مقاله به بررسی "قابهای تلفیقی تعمیم یافته‌ی در هم تنیده در فضای هیلبرت" و بعضی از خواص مهم آن خواهیم پرداخت. این قابها، حالت درهم تنیده‌ی "قابهای تلفیقی تعمیم یافته" می‌باشد که وحید صدری و همکارانش [۴] آن را تعریف و به بررسی بعضی از خواص آن پرداخته‌اند. در ادامه، بعد از بیان چند تعریف مقدماتی و اساسی به بررسی چند قضیه در مورد ساخت چنین قابهایی (قابهای تلفیقی تعمیم یافته‌ی در هم تنیده) با استفاده از عملگرهای خطی و کراندار و همچنین ارتباط بین "قابهای تلفیقی تعمیم یافته" و "قابهای تلفیقی تعمیم یافته‌ی در هم تنیده" خواهیم پرداخت.

کلمات کلیدی: فضای هیلبرت، قاب تعمیم یافته، قاب تلفیقی تعمیم یافته، قابهای درهم تنیده.

۱- مقدمه

نظریه قابها در سالهای اخیر پیشرفت شگرفی داشته و این امر باعث رشد و توسعه کاربردهای متعدد و جدید آنها شده است. علاوه بر کاربردهایی مانند پردازش سیگنال و پردازش تصویر، اخیرا کاربردهایی در زمینه فشرده سازی داده‌ها، بهبود استحکام و انتقال داده‌ها و شبکه‌های حسگر بی‌سیم نیز افزوده شده است.

قابهای تلفیقی^۱ یک تعمیم قدرتمند از قابهای کلاسیک هستند که توسط کاسازا و کوتینیوک [۲] معرفی شدند، که امکان تحلیل داده‌ها در چندین زیرفضا را به طور همزمان فراهم می‌کنند. تعمیم بعدی این مفهوم، منجر به پیدایش قابهای تلفیقی تعمیم یافته^۲ شد که در آن، عملگرهای خطی روی برآیندهای تصویری در زیرفضاها اعمال می‌شوند و انعطاف‌پذیری بیشتری را ایجاد می‌کنند.

مفهوم در هم تنیده^۲ در قابها، توسط بمرز و همکارانش [۱] معرفی شد. ایده اصلی این است که اگر چندین قاب داشته باشیم، بتوانیم با انتخاب دلخواه بردارها از بین آنها (مطابق یک الگوی بافندگی)، همچنان یک قاب جدید و کارآمد بسازیم. یکی از قابلیت‌های بالقوه قابهای در هم تنیده، کاربردهای آنها در شبکه‌های حسگر بی‌سیم می‌باشد. در سال‌های اخیر، "قابهای تلفیقی تعمیم یافته" بصورت "درهم تنیده" مورد بررسی و تحقیق قرار گرفته که در این مقاله ساخت و خواص چنین قابهایی مورد بررسی اجمالی قرار خواهد گرفت.

در سرتاسر این مقاله H و K فضاهای هیلبرت جدایی‌پذیر هستند. $B(H, K)$ گردایه‌ای از عملگرهای خطی کراندار از H به K می‌باشند و در صورتی که $H = K$ باشد با نماد $B(H)$ نشان می‌دهند. همچنین مجموعه I ، زیرمجموعه‌ی اعداد صحیح

\mathbb{Z} می‌باشد و $[m] = \{1, 2, 3, \dots, m\}$ برای هر $m > 1$. π_V تصویر متعامد از H به زیر فضای بسته $V \subset H$ و $\{H_j\}_{j \in I}$

¹ Fusion frames

² Weaving

ششمین همایش ملی ریاضی و آمار

<https://conf.gonbad.ac.ir/msc1404>

دنباله هایی از فضاهاى هیلبرت جدایی پذیر هستند.

۲- نتایج اصلی

در ابتدا به تعریف چند قاب مختلف که در این مقاله بکار رفته اند، می پردازیم.

۲.۱- تعریف قاب در هم تنیده^۱

یک خانواده از قاب های $\{f_{ij}\}_{i \in [m], j \in I}$ برای H را "درهم تنیده" گویند هرگاه اعداد ثابت A و B طوری باشند بطوریکه برای هر افزاز $\{\sigma_i\}_{i \in [m]}$ از I ، خانواده $\{f_{ij}\}_{i \in [m], j \in \sigma_i}$ قاب برای H با همان کران های A و B باشند.

۲.۲- تعریف قاب تلفیقی تعمیم یافته^۲

فرض کنید $w = \{w_j\}_{j \in I}$ مجموعه ای از زیرفضاهای بسته ی H باشند و $\{v_j\}_{j \in I}$ دنباله ای از وزن ها (دنباله ی حقیقی) باشند بطوریکه، $v_j > 0$ و $\Lambda_j \in B(H, H_j)$ به ازای هر $j \in I$. در این صورت $\Lambda := (W_j, \Lambda_j, v_j)_{j \in I}$ را قاب در هم تنیده برای H گویند هرگاه اعداد ثابت $0 < A \leq B < \infty$ برای هر $f \in H$ طوری وجود داشته باشد بطوریکه داشته باشیم:

$$A\|f\|^2 \leq \sum_{j \in I} v_j^2 \|\Lambda_j \pi_{w_j} f\|^2 \leq B\|f\|^2.$$

۲.۳- تعریف قاب تلفیقی تعمیم یافته ی در هم تنیده^۳

خانواده ای از قابهای تلفیقی تعمیم یافته $(W_{ij}, \Lambda_{ij}, v_{ij})_{j \in I, i \in [m]}$ برای H را قاب تلفیقی تعمیم یافته ی در هم تنیده گویند هرگاه اعداد ثابت A و B طوری وجود داشته باشند بطوریکه برای هر افزاز $\{\sigma_i\}_{i \in [m]}$ از I ، خانواده $(W_{ij}, \Lambda_{ij}, v_{ij})_{j \in \sigma_i, i \in [m]}$ قاب برای H با همان کران های A و B باشند.

فرض کنید یک قاب تلفیقی تعمیم یافته ی در هم تنیده برای فضای هیلبرت H داشته باشیم، با استفاده از یک عملگر خطی و کران دار $U \in B(H, K)$ می توان یک قاب تلفیقی تعمیم یافته در هم تنیده برای فضای هیلبرت دیگر K ساخت. در قضیه بعدی شرایط لازم و کافی در مورد ساخت چنین قابهایی با استفاده از عملگر های خطی و کراندار بیان شده است.

۲.۴- قضیه [3]

هر گاه $(W_{ij}, \Lambda_{ij}, v_{ij})_{j \in I, i \in [m]}$ یک قاب تلفیقی تعمیم یافته ی در هم تنیده برای فضای هیلبرت H و $U \in B(H, K)$ باشد، آنگاه $(\overline{UW_{ij}}, \Lambda_{ij}, \pi_{w_j} U^*, v_{ij})_{j \in I, i \in [m]}$ یک قاب تلفیقی تعمیم یافته ی در هم تنیده برای فضای هیلبرت K خواهد بود اگر و فقط اگر عددی مانند $\delta > 0$ طوری باشد بطوریکه به ازای هر $f \in K$ داشته باشیم: $\|U^* f\| \geq \delta \|f\|$

۲.۵- نتیجه

¹ Woven frames

² G-fusion frames

³ Weaving g-fusion frames

ششمین همایش ملی ریاضی و آمار

<https://conf.gonbad.ac.ir/msc1404>

در قضیه ۲,۴ هرگاه $(W_{ij}, \Lambda_{ij}, v_{ij})_{j \in I, i \in [m]}$ یک قاب تلفیقی تعمیم یافته در هم تنیده برای فضای هیلبرت H با کران‌های A و B باشند و $U \in B(H)$ با برد بسته باشد، آنگاه $(\overline{UW_{ij}}, \Lambda_{ij}, \pi_{W_{ij}} U^*, v_{ij})_{j \in I, i \in [m]}$ یک قاب تلفیقی تعمیم یافته در هم تنیده برای فضای هیلبرت $R(U)$ با کران‌های پایین و بالای به ترتیب $A \|U^+\|^{-2}$ و $B \|U\|^2$ خواهد بود.

۲,۶- نکته

در نتیجه قبلی (۲,۵) اگر $U \in B(H)$ عملگر معکوس‌پذیر باشد آنگاه عملگر UW_{ij} به ازای هر $i \in [m], j \in I$ دارای برد بسته خواهد بود و لذا $(UW_{ij}, \Lambda_{ij}, \pi_{W_{ij}} U^*, v_{ij})_{j \in I, i \in [m]}$ یک قاب تلفیقی تعمیم یافته در هم تنیده برای فضای هیلبرت H خواهد بود که کران پایین آن $A \|U^{-1}\|^{-2}$ و کران بالای آن $B \|U\|^2$ خواهد بود، بخصوص اگر U عملگر واحد باشد. کران‌های پایین و بالای قاب‌های $(UW_{ij}, \Lambda_{ij}, \pi_{W_{ij}} U^*, v_{ij})_{j \in I, i \in [m]}$ و $(W_{ij}, \Lambda_{ij}, v_{ij})_{j \in I, i \in [m]}$ با هم برابر خواهند بود. قضیه زیر نشان می‌دهد که با استفاده از عملگر واحد می‌توان از یک قاب تلفیقی تعمیم یافته، قاب تعمیم یافته در هم تنیده ساخت.

۲,۷- قضیه [3]

فرض کنید $\Lambda := (W_j, \Lambda_j, v_j)_{j \in I}$ یک قاب تلفیقی تعمیم یافته برای H با کران‌های قاب A و B باشد و $U \in B(H)$ یک عملگر واحد باشد. اگر $\|Id_H - U\| \leq \frac{A}{B}$ ، آنگاه $\{(W_j, \Lambda_j, v_j)_{j \in I}, (U^{-1}W_j, \Lambda_j U, v_j)_{j \in I}\}$ یک قاب تلفیقی تعمیم یافته در هم تنیده برای H خواهد بود. قضیه زیر نشان می‌دهد که با حذف یک زیر فضا از قاب تلفیقی تعمیم یافته در هم تنیده، باز خاصیت قاب بودن، حفظ می‌شود و بردارهای باقی مانده تشکیل یک قاب تلفیقی تعمیم یافته در هم تنیده، با کران پایین متفاوت می‌دهد.

۲,۸- قضیه

فرض کنید Ω یک زیر مجموعه نامتناهی از I ، $\Omega \subset I$ باشد و $(W_{ij}, \Lambda_{ij}, v_{ij})_{j \in I, i \in [m]}$ یک قاب تلفیقی تعمیم یافته در هم تنیده برای H با کران‌های A و B باشند. اگر $C := \sum_{i \in [m]} \sum_{j \in \Omega} v_{ij}^2 \|\Lambda_{ij}\|^2 < \infty$ آنگاه $(W_{ij}, \Lambda_{ij}, v_{ij})_{j \in I/\Omega, i \in [m]}$ نیز یک قاب تلفیقی تعمیم یافته در هم تنیده برای H با کران‌های $A - C$ و B خواهد بود.

اثبات: کران بالا، بدیهی است. برای یافتن کران پایین فرض کنید $\{\sigma_i\}_{i \in m} \subset I/\Omega$ و $f \in H$ ، بنابراین خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \sum_{i \in [m]} \sum_{j \in \sigma_i} v_{ij}^2 \|\Lambda_{ij} \pi_{W_{ij}} f\|^2 &= \sum_{i \in [m]} \sum_{j \in \sigma_i \cup \Omega} v_{ij}^2 \|\Lambda_{ij} \pi_{W_{ij}} f\|^2 - \sum_{i \in [m]} \sum_{j \in \Omega} v_{ij}^2 \|\Lambda_{ij} \pi_{W_{ij}} f\|^2 \\ &\geq A \|f\|^2 - \sum_{i \in [m]} \sum_{j \in \Omega} v_{ij}^2 \|\Lambda_{ij}\|^2 \|f\|^2 = (A - C) \|f\|^2 \end{aligned}$$

ششمین همایش ملی ریاضی و آمار

<https://conf.gonbad.ac.ir/msc1404>

و حکم ثابت می‌شود.

۲،۹- نکته

در قضیه ۲،۸، نامتناهی بودن زیر مجموعه Ω یک شرط اساسی است و در صورت حذف تعداد متناهی بردار از قاب تلفیقی تعمیم یافته‌ی در هم تنیده، خاصیت قاب بودن حفظ نخواهد شد. در مثال زیر (۲،۱۰) این موضوع نشان داده شده است.

۲،۱۰- مثال

فضای هیلبرت \mathbb{R}^3 را با پایه استاندارد $\{e_1, e_2, e_3\}$ در نظر بگیرید. فرض کنید $I = \{1, 2, 3\}$ و
 $w_1 = \text{span}\{e_1, e_2\}, w_2 = \text{span}\{e_2, e_3\}, w_3 = \text{span}\{e_1, e_3\}$
 $X_1 = \text{span}\{e_1\}, X_2 = \text{span}\{e_2\}, X_3 = \text{span}\{e_3\}$
 $v_1 = v_2 = v_3 = 1$
 همچنین فرض کنید $\Theta_j := H \rightarrow \mathbb{C}$ که برای هر $j \in I$ و هر $f \in H$ داشته باشیم:

$$\Lambda_1 f = \langle f, e_1 \rangle, \Lambda_2 f = \langle f, e_2 \rangle, \Lambda_3 f = \langle f, e_3 \rangle,$$

$$\Theta_1 f = \langle f, e_1 + e_2 \rangle, \Theta_2 f = \langle f, e_2 + e_3 \rangle, \Theta_3 f = \langle f, e_3 + e_1 \rangle$$

به راحتی می‌توان حساب کرد که $(w_j, \Lambda_j, 1)_{j \in I}$ و $(X_j, \Theta_j, 1)_{j \in I}$ ، پاراسوال قاب‌های تلفیقی تعمیم یافته‌ی در هم تنیده برای H می‌باشند. حال با انتخاب $\Omega = \{1\}$ و حذف این اندیس از I ، دیگر خاصیت قاب بودن $(w_j, \Lambda_j, 1)_{j \in I}$ و $(X_j, \Theta_j, 1)_{j \in I}$ برقرار نخواهد بود.

۳- نتیجه و جمع‌بندی

با توجه به مطالب بیان شده در این مقاله، می‌توان به ارتباط بین قابهای تلفیقی تعمیم یافته‌ی در هم تنیده در فضای هیلبرت با قابهای تلفیقی تعمیم یافته در فضای هیلبرت پی برد. بنابراین، این فرضیه مطرح خواهد شد که بعضی از قضایایی که برای قابهای تلفیقی تعمیم یافته بیان شده‌اند را می‌توان برای قابهای تلفیقی تعمیم یافته در هم تنیده نیز بیان و اثبات نمود. همچنین می‌توان بطور مشابه قابهای تلفیقی تعمیم یافته در هم تنیده‌ی پیوسته در فضای هیلبرت را تعریف و قضایای مشابه را در فضاهای اندازه، بدست آورد.

۴- مراجع

- [1] Bemrose T., Casazza P. G., Gröchenic K., Lammers M. C., Lynch R. G. Weaving frames. Operators and Matrices, 2016, vol. 10(4), pp.1093-1116.
- [2] Casazza P. G., Kutyniok G. Lis. Fusion frames and distributed processing. Appl. Comput. Harmon. Anal, 2008, vol. 25(1) pp.114-132.
- [3] Rahimlou Gh., Sadri V., Ahmadi R., Weaving g-fusion frames in Hilbert spaces. Probl. Anal. Issue Anal. 2025, vol. 14(32), No 3, pp.76-98..
- [4] Sadri V., Rahimlou Gh., Ahmadi R., Zarghami Farfar R. Construction of g-fusion frames in Hilbert spaces. Inf. Dim. Anal. Quan. Prob.(IDA-QP), 2020, vol. 23, pp.1-18.



ششمین همایش ملی ریاضی و آمار

<https://conf.gonbad.ac.ir/msc1404>

F-145، صص ۱۱۰-۱۱۴.

طراحی و تبیین مدل آموزشی یکپارچه اعداد صحیح بر مبنای مولفه های سه گانه یادگیری ریاضیات

سارا کرنگیش^۱، پونه امید^۲

دانشگاه پیام نور، دانشکده ریاضی، تهران، ایران؛ sara.karangish73@gmail.com

دانشگاه پیام نور، دانشکده ریاضی، تهران، ایران؛ pooneh.omidi.710122@gmail.com

چکیده

یادگیری اعداد صحیح به عنوان یکی از مفاهیم بنیادین ریاضیات مدرسه‌ای، همواره با چالش‌های مفهومی و رویه‌ای برای دانش‌آموزان همراه بوده است. پژوهش حاضر با هدف طراحی و تبیین یک مدل آموزشی یکپارچه برای آموزش اعداد صحیح انجام شد که مبتنی بر مؤلفه‌های سه‌گانه یادگیری ریاضیات شامل فهم مفهومی، مهارت رویه‌ای و کاربرد در حل مسئله است. در این مطالعه، ابتدا بر اساس تحلیل محتوای کتب درسی و بررسی پیشینه نظری، نیازهای یادگیری دانش‌آموزان در حوزه اعداد صحیح شناسایی شد. سپس مدل پیشنهادی با بهره‌گیری از رویکرد چندبازنمایی، فعالیت‌محوری، و تلفیق تدریس بصری و عملی طراحی گردید. این مدل تلاش می‌کند رابطه بین سه مؤلفه اصلی یادگیری را در قالب یک ساختار منسجم نشان دهد و مسیر آموزش از درک مفاهیم منفی و مثبت تا عملیات جمع و تفریق و کاربردهای واقعی را یکپارچه سازد. یافته‌های نظری پژوهش نشان می‌دهد که رویکرد تلفیقی ارائه شده می‌تواند به کاهش خطاهای رایج، تقویت درک عمیق و افزایش توانایی حل مسئله در یادگیری اعداد صحیح منجر شود. در پایان نیز پیشنهادهایی برای به‌کارگیری مدل در محیط‌های آموزشی و توسعه پژوهش‌های آینده ارائه شده است.

کلمات کلیدی: اعداد صحیح، آموزشی یکپارچه، مولفه های سه‌گانه یادگیری ریاضیات.

۱- مقدمه

یادگیری اعداد صحیح یکی از پایه‌های اساسی تفکر ریاضی در دوره متوسطه است و درک عمیق آن نقش تعیین‌کننده‌ای در پیشرفت مفاهیمی همچون معادلات، نسبت‌ها، تابع و جبر دارد [2]. با وجود این اهمیت، پژوهش‌ها نشان می‌دهد که دانش‌آموزان در فهم مفهوم اعداد منفی، تفسیر بازنمایی‌های متعدد، و انجام عملیات جمع و تفریق اعداد صحیح با خطاهای مفهومی و رویه‌ای قابل توجهی روبه‌رو هستند [7,9]. براساس گزارش [4] یادگیری مؤثر ریاضیات زمانی رخ می‌دهد که میان سه مؤلفه اصلی فهم مفهومی، مهارت رویه‌ای و شایستگی در حل مسئله هم‌زمان و یکپارچه رابطه برقرار شود. این نگاه در نظریه‌های برونر نیز تأیید شده است؛ او یادگیری را فرآیندی می‌داند که با حرکت از بازنمایی‌های عینی به تصویری و سپس نمادی معنا پیدا می‌کند [1]. در حوزه آموزش اعداد صحیح، استفاده از بازنمایی‌های چندگانه مانند محور اعداد، مدل دما، مدل بده-بستان و نمایش‌های حرکتی، تأثیر چشم‌گیری در رفع سوءبرداشت‌های مفهومی دارد [3].

پژوهش‌های انجام‌شده در ایران نیز نشان می‌دهد که نبود یک مدل آموزشی منسجم و چندلایه، علت اصلی پایداری خطاهای دانش‌آموزان در حوزه اعداد صحیح است [10]. بیشتر برنامه‌های آموزشی بر آموزش رویه‌ای عملیات تمرکز دارند و به ارتباط بین فعالیت، مفهوم و کاربرد کمتر پرداخته می‌شود.

بر این اساس، ضرورت طراحی یک مدل آموزشی یکپارچه که مؤلفه‌های سه‌گانه یادگیری ریاضیات را در قالب یک ساختار

ششمین همایش ملی ریاضی و آمار

<https://conf.gonbad.ac.ir/msc1404>

هم‌بسته و کاربردی در آموزش اعداد صحیح ترکیب کند، کاملاً محسوس است. پژوهش حاضر با تکیه بر مبانی نظری معتبر و تحلیل نیازهای یادگیری دانش‌آموزان تلاش می‌کند الگویی ارائه دهد که از مرحله درک معنای مثبت و منفی تا حل مسئله در موقعیت‌های واقعی را در یک مسیر یادگیری منسجم سازمان‌دهی کند.

۲- مبانی نظری

یادگیری اعداد صحیح یکی از حساس‌ترین نقاط انتقالی در برنامه درسی ریاضیات است؛ زیرا دانش‌آموزان برای نخستین بار با مفهومی مواجه می‌شوند که برخلاف شمارش طبیعی، دارای دو جهت مثبت و منفی است. پژوهش‌های متعدد نشان داده‌اند که درک این مفهوم نیازمند تحول شناختی و عبور از تفکر یک‌بعدی مبتنی بر شمارش است [7]. بسیاری از دشواری‌های دانش‌آموزان در این حوزه ناشی از نبود چارچوب منسجم برای ترکیب هم‌زمان یادگیری مفهومی، مهارت‌های رویه‌ای و کاربردهای واقعی است.

از دیدگاه [4]، یادگیری ریاضیات زمانی پایدار و عمیق خواهد بود که میان سه مؤلفه اصلی یعنی فهم مفهومی، تسلط رویه‌ای و توانایی حل مسئله ارتباطی منظم برقرار شود. این سه مؤلفه بخشی از شایستگی‌های ریاضی هستند که [2] نیز آن‌ها را عناصر کلیدی ریاضیات مدرسه‌ای معرفی کرده‌اند. براساس این نگاه، آموزش مفاهیم ریاضی نباید به صورت خطی و منفصل، بلکه باید در قالب یک شبکه درهم‌تنیده از مفهوم، روش و کاربرد ارائه گردد.

فهم مفهومی، نخستین مؤلفه یادگیری، به معنای درک روابط، ساختارها و معناهای پشت یک مفهوم است. در حوزه اعداد صحیح، فهم مفهومی شامل درک معنای جهت‌دار بودن اعداد، مفهوم صفر به عنوان نقطه مرجع، و روابط تقارنی بین اعداد مثبت و منفی است. برونر [1] تأکید می‌کند که یادگیری در این سطح زمانی مؤثرتر است که از بازنمایی‌های چندگانه عینی، تصویری و نمادی استفاده شود. برای نمونه، دانش‌آموز از طریق مدل دما، مدل بده بستان مالی، یا حرکت روی محور اعداد می‌تواند معناهای متفاوت اما مکملی از اعداد مثبت و منفی را تجربه کند. دومین مؤلفه، مهارت رویه‌ای است که شامل توانایی اجرای درست و روان عملیات ریاضی است. پژوهش‌ها نشان می‌دهند که یکی از دلایل خطاهای دانش‌آموزان در جمع و تفریق اعداد صحیح، استفاده نادرست از قواعد حفظ‌کردنی است بدون اینکه ارتباط آن با مفهوم روشن شده باشد [3]. بنابراین، انتقال از فهم مفهومی به مهارت رویه‌ای باید تدریجی و مبتنی بر فعالیت‌های معنامحور باشد. برای مثال، پیش از آموزش قاعده «دو علامت هم‌نام مثبت می‌شود»، لازم است دانش‌آموز با فعالیت‌هایی مانند «افزودن حرکت به جهت راست یا چپ روی محور» معنا را تجربه کند.

سومین مؤلفه، کاربرد در حل مسئله است؛ یعنی توانایی استفاده از مفاهیم و رویه‌ها در موقعیت‌های واقعی و غیر آشنا. برای اعداد صحیح، این شامل تفسیر دما، ارتفاع نسبت به سطح دریا، سود و زیان، یا اختلاف‌های زمانی است. به اعتقاد پولیا [5] حل مسئله فرآیندی شناختی است که درک عمیق و انعطاف‌پذیر از مفهوم را تقویت می‌کند. زمانی که دانش‌آموز مفهوم اعداد صحیح را تنها در قالب محاسبات نمادین می‌آموزد، توانایی او در تعمیم و تفسیر موقعیت‌های جدید محدود می‌شود.

رابطه میان این سه مؤلفه در پژوهش‌های یادگیری ریاضیات به‌عنوان یک ساختار درهم‌تنیده معرفی شده است؛ به‌گونه‌ای که فهم مفهومی بنیان مهارت رویه‌ای است و مهارت رویه‌ای بدون کاربرد معنای پایدار نخواهد داشت. مطالعه [6] نشان می‌دهد که یادگیری مؤثر ریاضی حاصل تقویت هم‌زمان «بازنمایی‌های ساختاری» و «فرایندهای رویه‌ای» است. بنابراین، هر گونه مدل آموزشی برای اعداد صحیح باید به‌جای تمرکز تک‌بعدی بر قواعد، به‌گونه‌ای طراحی شود که حرکت بین این سه مؤلفه را تسهیل کند.

دیدگاه‌های شناختی اجتماعی نیز اهمیت تعاملات یادگیری را در آموزش مفاهیم پیچیده مانند اعداد صحیح برجسته می‌کنند. ویگوتسکی [8] یادگیری را فرآیندی اجتماعی می‌داند که در آن معلم با استفاده از سکوی حمایتی (Scaffolding) دانش‌آموز

ششمین همایش ملی ریاضی و آمار

<https://conf.gonbad.ac.ir/msc1404>

را در منطقه رشد تقریبی به سطح بالاتری هدایت می‌کند. این دیدگاه در آموزش اعداد صحیح کاربرد ویژه دارد؛ زیرا دانش‌آموزان اغلب برای عبور از برداشت‌های شهودی اولیه مانند «عدد منفی همیشه کوچک‌تر است» نیازمند هدایت شناختی و مثال‌های هدایت‌شده هستند. در ایران، مطالعات متعددی نشان داده‌اند که یکی از دلایل اصلی ضعف دانش‌آموزان در یادگیری اعداد صحیح، جدایی فرآیند تدریس از مدل‌های چندبازنمایی و عدم ارتباط میان فعالیت، مفهوم و کاربرد است [10,11] تحلیل محتوای کتاب‌های درسی نیز نشان می‌دهد که با وجود ارائه مثال‌های مفید، همبستگی میان مراحل یادگیری و انسجام میان مفهوم، روش و کاربرد هنوز به‌طور کامل شکل نگرفته است.

بر این اساس، ضرورت وجود یک مدل آموزشی یکپارچه که هر سه مؤلفه یادگیری ریاضیات را در قالب یک ساختار منسجم ترکیب کند، کاملاً محسوس است. چنین مدلی می‌تواند به‌عنوان نقشه راه معلم برای سازمان‌دهی فعالیت‌های مقدماتی، ساخت مفاهیم، تمرین‌های رویه‌ای و مسائل کاربردی عمل کند و مانع از شکل‌گیری یادگیری سطحی شود. پژوهش حاضر بر پایه همین ضرورت، تلاش می‌کند چارچوبی طراحی کند که یادگیری اعداد صحیح را از مرحله درک معنا تا کاربرد در حل مسئله در قالب یک فرآیند یکپارچه سازمان‌دهی کند.

۳- روش‌شناسی پژوهش (ترکیبی: تحلیل محتوا + طراحی مدل آموزشی)

پژوهش حاضر از نظر هدف، پژوهشی توسعه‌ای کاربردی است و با رویکردی ترکیبی انجام شده است. این رویکرد شامل دو مرحله اصلی است:

۱. تحلیل محتوای اسنادی و داده‌های نظری

۲. طراحی مدل آموزشی یکپارچه بر اساس یافته‌های مرحله نخست

این نوع روش در پژوهش‌های حوزه آموزش ریاضی که هدف آن‌ها استخراج مؤلفه‌ها، ترکیب آن‌ها در قالب یک مدل و سپس تبیین ساختار مدل است، کاربرد گسترده‌ای دارد.

۴- مدل ریاضی آموزشی اعداد صحیح

به‌منظور تبیین فرآیند یادگیری اعداد صحیح در چارچوب آموزش یکپارچه، یادگیری ریاضی به‌عنوان یک سامانه پویا متشکل از مؤلفه‌های اصلی یادگیری در نظر گرفته می‌شود. بر اساس مبانی نظری پژوهش، این مؤلفه‌ها شامل فهم مفهومی، مهارت رویه‌ای و کاربرد در حل مسئله هستند که در تعامل متقابل با یکدیگر منجر به یادگیری معنادار می‌شوند.

تعریف متغیرها

در این مدل، متغیرهای زیر تعریف می‌شوند:

C: میزان فهم مفهومی اعداد صحیح

(درک معنای مثبت و منفی، صفر به‌عنوان نقطه مرجع، جهت‌دار بودن و تقارن)

P: میزان مهارت رویه‌ای

(تسلط بر انجام عملیات جمع و تفریق اعداد صحیح بر پایه درک معنا)

A: میزان توانایی کاربرد اعداد صحیح در حل مسئله

(تفسیر موقعیت‌های واقعی مانند دما، تراز ارتفاع، بده-بستان و اختلاف‌های عددی)

L: سطح کلی یادگیری اعداد صحیح

تمام متغیرها به‌صورت مفهومی و نرمال شده در بازه $0 \leq C, P, A, L \leq 1$ در نظر گرفته می‌شوند.

ششمین همایش ملی ریاضی و آمار

<https://conf.gonbad.ac.ir/msc1404>

ساختار ریاضی مدل یادگیری

با توجه به دیدگاه یکپارچه در آموزش ریاضیات، سطح یادگیری اعداد صحیح تابعی از سه مؤلفه اصلی یادگیری است:

$$L = f(C, P, A)$$

از آنجا که فقدان هر یک از مؤلفه‌ها موجب تضعیف فرایند یادگیری می‌شود، رابطه‌ای ضربی برای مدل در نظر گرفته می‌شود:

$$L = C \times P \times A$$

این رابطه بیانگر آن است که یادگیری پایدار اعداد صحیح تنها زمانی محقق می‌شود که فهم مفهومی، مهارت رویه‌ای و کاربرد

در حل مسئله به‌صورت هم‌زمان و متعادل رشد یابند.

روابط درونی مؤلفه‌ها

بر اساس مبانی شناختی آموزش ریاضیات، فهم مفهومی نقش زیربنایی در شکل‌گیری مهارت رویه‌ای دارد.

از این رو، مهارت رویه‌ای به‌صورت تابعی از فهم مفهومی در نظر گرفته می‌شود:

$$P = g(C)$$

همچنین توانایی حل مسئله نیازمند ترکیب فهم مفهومی و تسلط رویه‌ای است؛ لذا:

$$A = h(C, P)$$

این روابط نشان می‌دهند که آموزش قواعد عملیاتی بدون پشتوانه مفهومی منجر به یادگیری سطحی و ناپایدار خواهد شد.

تفسیر آموزشی مدل

در چارچوب این مدل، فرایند آموزش اعداد صحیح از مراحل زیر تشکیل می‌شود:

۱. تقویت فهم مفهومی (C) از طریق بازنمایی‌های چندگانه مانند محور اعداد، مدل دما و فعالیت‌های حرکتی
 ۲. توسعه مهارت رویه‌ای (P) از طریق استخراج قواعد جمع و تفریق بر پایه تجربیات مفهومی
 ۳. کاربرد مفاهیم (A) در حل مسائل واقعی و موقعیت‌های معنادار
- حرکت بین این مراحل خطی و یک‌طرفه نیست، بلکه به‌صورت چرخه‌ای و تعاملی انجام می‌شود و هر مؤلفه، مؤلفه‌های دیگر را تقویت می‌کند.

کارکرد مدل در آموزش اعداد صحیح

مدل یادگیری ریاضی پیشنهادی می‌تواند به‌عنوان نقشه راه آموزشی برای معلم عمل کند و در طراحی فعالیت‌های آموزشی، تمرین‌ها و مسائل کاربردی مورد استفاده قرار گیرد. این مدل با تأکید بر ارتباط هم‌زمان بین مفهوم، روش و کاربرد، از شکل‌گیری یادگیری سطحی جلوگیری می‌کند و زمینه درک عمیق و پایدار اعداد صحیح را فراهم می‌کند.

۵- نتیجه‌گیری

پژوهش حاضر با هدف طراحی و تبیین یک مدل آموزشی یکپارچه برای آموزش اعداد صحیح بر مبنای سه مؤلفه اساسی یادگیری ریاضیات—فهم مفهومی، مهارت رویه‌ای و کاربرد در حل مسئله—انجام شد. تحلیل محتوای کتب درسی ریاضی دوره متوسطه اول نشان داد که اگرچه هر یک از این مؤلفه‌ها به‌طور جداگانه در کتاب وجود دارد، اما ارتباط نظام‌مند و هدفمندی میان آن‌ها مشاهده نمی‌شود و این موضوع موجب شکل‌گیری خطاهای مفهومی و ناپایداری یادگیری در دانش‌آموزان می‌شود.

بر این اساس مدل آموزشی پیشنهادی در قالب یک ساختار سه‌لایه و چرخه‌ای طراحی شد که در آن:

- لایه فهم مفهومی نقش بنیادی دارد و با استفاده از بازنمایی‌های چندگانه (محور اعداد، مدل دما، مدل بده-بستان و مدل حرکتی) معنا را برای دانش‌آموز می‌سازد.



ششمین همایش ملی ریاضی و آمار

<https://conf.gonbad.ac.ir/msc1404>

• لایه مهارت رویه‌ای پس از شکل‌گیری مفهوم توسعه می‌یابد و قواعد جمع و تفریق از دل تجربه‌های مفهومی استخراج می‌شود، نه حفظی.

• لایه کاربرد در حل مسئله یادگیری را وارد موقعیت‌های واقعی می‌کند و سبب تثبیت و انتقال معنا به سطوح بالاتر می‌شود.

مدل نهایی با تعریف ریاضی $F = A \circ P \circ C$ نشان می‌دهد که یادگیری اعداد صحیح زمانی به حالت پایدار می‌رسد که جریان فهم \rightarrow مهارت \rightarrow کاربرد به صورت چرخه‌ای و مداوم تکرار شود. نتایج پژوهش تأکید می‌کند که این مدل می‌تواند در کاهش خطاهای مفهومی رایج، افزایش درک عمیق، بهبود محاسبه و تقویت مهارت حل مسئله نقش مؤثری داشته باشد. همچنین ساختار مدل به‌گونه‌ای است که می‌تواند به‌عنوان الگوی طراحی آموزشی در بخش‌های دیگر آموزش ریاضی نیز مورد استفاده قرار گیرد.

۶- پیشنهادات

۱. پیشنهاد می‌شود پژوهشگران مدل ارائه‌شده را با روش آزمایشی (Quasi-Experimental) در محیط واقعی کلاس درس اجرا و اثر آن را بر متغیرهایی مانند فهم مفهومی، عملکرد محاسباتی و انگیزه یادگیری بررسی کنند.
۲. طراحی نسخه‌های توسعه‌یافته مدل برای سایر مباحث ریاضی مانند توان‌ها، معادلات خطی و کسرها پیشنهاد می‌شود تا قابلیت تعمیم مدل ارزیابی گردد.
۳. انجام تعداد بیشتری از پژوهش‌های کیفی (مصاحبه با معلمان، مشاهده کلاس) می‌تواند در فهم موانع اجرا و بهبود کارایی مدل مفید باشد.
۴. توصیه می‌شود در مطالعات آینده، نسخه دیجیتالی و تعاملی مدل (شامل محور اعداد پویا و شبیه‌ساز دما) طراحی و ارزیابی شود.

۷- مراجع

- [1] Bruner, J., *Toward a Theory of Instruction*. Harvard University Press, (1966).
- [2] Kilpatrick, J., Swafford, J., & Findell, B. *Adding It Up: Helping Children Learn Mathematics*. National Academy Press, (2001).
- [3] Lamon, S. J. *Teaching Fractions and Ratios for Understanding*. Routledge, (2012).
- [4] NCTM. *Principles to Actions: Ensuring Mathematical Success for All*. National Council of Teachers of Mathematics, (2014).
- [5] Polya, G. *How to Solve It*. Princeton University Press, (1957).
- [6] Sfard, A. On the dual nature of mathematical conceptions. *Educational Studies in Mathematics*, (1991).
- [7] Vlassis, J. The role of mathematical representations in understanding integers. *Journal of Mathematical Behavior*, (2008).
- [8] Vygotsky, L. *Mind in Society*. Harvard University Press, (1978).
- [9] سیدمحمدی، م. یادگیری اعداد صحیح در دوره متوسطه: چالش‌ها و راهکارها. انتشارات آوای نور، (۱۳۹۷).
- [۱۰] صفاری‌نژاد، م. و همکاران. تحلیل خطاهای مفهومی دانش‌آموزان در اعداد صحیح. *مجله آموزش ریاضی دانشگاه فرهنگیان*، (۱۳۹۸).
- [۱۱] تیموری، ه. ارزیابی محتوای کتاب‌های درسی ریاضی در حوزه اعداد صحیح. *پژوهشنامه آموزش ریاضی*، (۱۳۹۶).

ششمین همایش ملی ریاضی و آمار

<https://conf.gonbad.ac.ir/msc1404>

F-158، صص ۱۱۵-۱۲۰.

تحلیل آماری فیلتر موجبری پلاسمونی شامل تشدیدگر

علیرضا دولت آبادی

استادیار، دانشگاه آیت الله بروجردی؛ alireza.dolatabady@abru.ac.ir

چکیده

تغییرات محتمل پارامترهای طراحی موجبر پلاسمونی به خاطر فرآیندهای ساخت، می‌تواند اثر قابل توجهی بر عملکرد این فیلتر موجبری، به ویژه از منظر طول موج کار داشته باشد. در یک بررسی کامل، عدم قطعیت ناشی از پارامترهای ساختاری گوناگون مانند پهنای موجبرهای ورودی و خروجی فیلتر، فاصله موجبرها از تشدیدگر موجود در ساختار، ابعاد تشدیدگر و ضریب شکست ماده داخل تشدیدگر و تاثیر آن بر ویژگی‌های عملکردی نوری کل ساختار مانند پهنای باند، طول موج مرکزی و نسبت انتقال موج، به صورت شاخص‌های مختلف آماری می‌توانند در نظر گرفته شوند. در این مقاله، تابع توزیع احتمال و انحراف معیار برای طول موج مرکزی ساختار فیلتر موجبری پلاسمونی با در نظر گرفتن تلورانس ساخت تشدیدگر و تغییرات شعاع آن، مطالعه می‌شوند. تحلیل‌های آماری یاد شده و شبیه‌سازی‌ها، توسط روش عددی تفاضل محدود در حوزه زمان به دست آمده‌اند. مطالعه آماری این ساختار که می‌تواند در طراحی مدارهای مجتمع نوری به کار گرفته شود، در تعیین میزان مجاز تلورانس خطا در فرآیند ساخت مفید است.

کلمات کلیدی: آماری، تشدیدگر، طول موج، فیلتر، موجبر پلاسمونی.

۱- مقدمه

استفاده از ادوات نوری به جای ادوات الکترونیک طی چند سال گذشته به طور فزاینده‌ای رشد یافته است. در کاربردهای مخابراتی نیز، هم‌سو با پیشرفت دیگر سامانه‌های الکترونیک و در راستای بهره‌برداری و به‌کارگیری بهینه از امکانات فراهم شده به وسیله روش‌های مخابرات نوری، یعنی ارسال و دریافت داده‌ها به کمک تار نوری، توجه پژوهش‌گران و مهندسان به سوی ادوات نوری جلب شده است. یکی از گام‌ها برای به‌کارگیری ادوات نوری در سامانه‌های گوناگون، فراهم نمودن مدارهای مجتمع نوری، در ابعاد نانومتری، به عنوان رقیبی با مدارهای مجتمع الکترونیک است. با این حال برخی محدودیت‌ها مانع تحقق چنین دستاوردی می‌شود که می‌توان به حد پراش نور به عنوان یکی از این محدودیت‌ها اشاره کرد [۱]. بنا بر این محدودیت، موجبرهای دی‌الکتریک برای هدایت موج در مدارهای مجتمع نوری، نمی‌توانند ابعادی کمتر از نصف طول موج داشته باشند. ایده‌ای که برای غلبه به این محدودیت در نظر گرفته شده، استفاده از ویژگی‌های انتشار امواج پلاسمون سطحی است. این امواج، در فصل مشترک رسانا-عایق تحریک و منتشر، و در راستای عمود بر آن‌ها میرا می‌شوند. موج‌برهای فلز-عایق-فلز در ابعاد نانومتر، می‌توانند امواج پلاسمونی را متمرکز و هدایت نمایند [۲]. تاکنون ساختارهای گوناگون پلاسمونی همچون فیلتر [۳، ۴]، سوئیچ [۵]، گیت منطقی [۶] و مقسم توان [۷] طراحی و بررسی شده‌اند.

از جمله ساختارهایی که پیش‌تر بررسی و معرفی شده‌اند، می‌توان به یک فیلتر موجبری پلاسمونی شامل یک تشدیدگر دایروی اشاره کرد. موج تابیده شده از موجبر ورودی ساختار، در طول موج‌های خاص که منطبق بر طول موج‌های تشدید تشدیدگر موجود در ساختار است، به آن تزویج شده و نهایتاً به موجبر خروجی منتقل می‌شود. بنابراین پاسخی میان‌گذر توسط این ساختار فراهم می‌شود. طول موج مرکزی، پهنای باند و نسبت انتقال موج این فیلتر، به پارامترهای ساختاری مانند ابعاد موجبرهای ورودی

ششمین همایش ملی ریاضی و آمار

<https://conf.gonbad.ac.ir/msc1404>

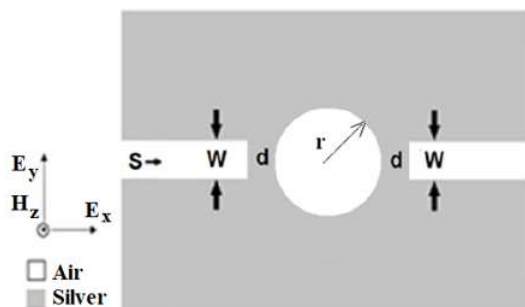
و خروجی، شعاع تشدیدگر دایره‌ای، فاصله بین تشدیدگر و موجبرها و جنس یا ضریب شکست ماده داخل تشدیدگر وابسته است [۸]. برای پیاده‌سازی عملی یک ساختار در ابعاد نانو، معمولا چند رهیافت رایج وجود دارند که بر اساس فن‌آوری ساخت لایه نازک و فن‌آوری خوردگی در ابعاد نانو هستند [۹]. معمولا به دلیل محدودیت‌های فرآیند ساخت، تحقق دقیق ابعاد از پیش طراحی شده ممکن نیست، و بنابراین عملکرد ساختار تشدیدگر به‌خاطر تاثیر این عدم دقت در ساخت، تحت تاثیر قرار می‌گیرد. در این مقاله، ضمن مروری دوباره بر تحلیل عملکرد این فیلتر پلاسمونی با استفاده از روش شبیه‌سازی تفاضل محدود در حوزه زمان، تاثیر تلورانس ساخت بر ویژگی‌های موجبری و هدایتی آن، به‌ویژه بر طول موج تشدید که تعیین کننده طول موج کار ساختار است و نقشی حیاتی در عملکرد آن دارد، به کمک شاخص‌های آماری مطالعه می‌شود. در این مقاله ابتدا در بخش ۲، ساختار فیلتر موجبری مورد نظر معرفی و عملکرد آن بررسی می‌شود. سپس در بخش ۳، ملاحظات و نتایج شبیه‌سازی ساختار و نیز تحلیل شاخص‌های آماری عملکرد آن ارائه می‌شوند. در بخش ۴ نیز، با بیان نتیجه‌گیری، مقاله خاتمه می‌یابد.

۲- ساختار و تحلیل عملکرد آن

نمای شماتیک ساختار مورد بررسی در شکل ۱ مشاهده می‌شود. این ساختار، یک فیلتر موجبری پلاسمونی با ساختار فلز-عایق-فلز و شامل یک کاواک تشدیدگر دایره‌ای است. عملکرد این ساختار بر اساس تزویج موج بین دو موج‌بر ورودی-خروجی و کاواک تشدیدگر بین آن‌ها، در طول موج‌های خاص است. این نتیجه بر اساس ویژگی تشدید کاواک دایره‌ای تزویج کننده موجبرهای ورودی و خروجی است. شرط تشدید به شعاع کاواک، و نیز ضرایب شکست مواد داخل و بیرون کاواک، یعنی هوا و فلز، وابسته است. در ساختار پیشنهادی، ماده دی‌الکتریک موجبرها و کاواک، هوا با ضریب دی‌الکتریک ۱ است. فلز تشکیل دهنده ساختار، نقره در نظر گرفته شده است که ضریب دی‌الکتریک آن بنا بر مدل درود به صورت زیر تعریف می‌شود [۱۰]:

$$\epsilon_m(\omega) = \epsilon_\infty - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 - j\gamma\omega} \quad (1)$$

ابعاد ساختار معرفی شده در شکل ۱، حین طراحی، به‌گونه‌ای انتخاب شده‌اند که شعاع تشدیدگر، r ، ۲۰۰ نانومتر، w ، پهنای موج‌برها، ۵۰ نانومتر، و d ، فاصله تزویج موج‌برها و تشدیدگر ۲۰ نانومتر هستند. با توجه به این که پهنای موج‌برها از طول موج‌های مورد بررسی بسیار کوچک‌تر هستند، تنها مد اصلی، یعنی TM_0 ، تحریک و منتشر می‌شود. نقطه s ، محل ورود موج تحریک شده پلاسمونی را نشان می‌دهد [۱۰].



شکل ۱: نمای شماتیک ساختار فیلتر موجبری مورد بررسی [۱۰]

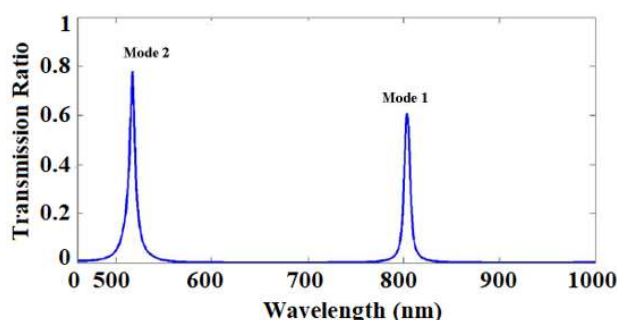
۳- نتایج شبیه‌سازی و تحلیل آماری

برای تحلیل مسائل الکترومغناطیس دو روش کلی نظری و عددی وجود دارد. پیچیدگی محاسبات نظری مسایل

ششمین همایش ملی ریاضی و آمار

<https://conf.gonbad.ac.ir/msc1404>

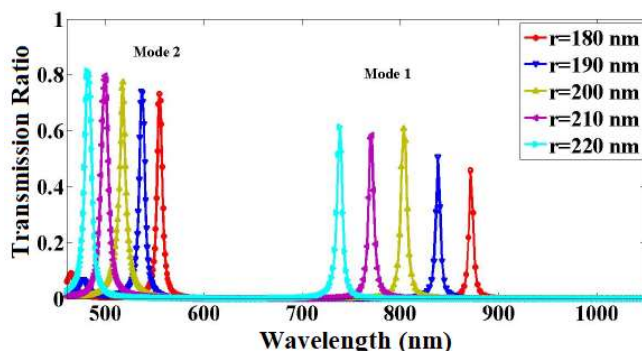
الکترومغناطیس، از مخاطرات پیش رو در بررسی ساختارهای مختلف و در کاربردهای گوناگون است. بهترین و شاید تنها راه حل چنین مسائلی، به ویژه در ساختارهای پیچیده، محیط‌های غیرخطی و پاشنده، به کاربردن روش‌های عددی است. امروزه به دلیل ویژگی‌های منحصر به فرد مواد غیرخطی و پاشنده، استفاده از آنها در طراحی ادوات مخابراتی، افزایش چشم‌گیری دارد. از طرفی پیشرفت تجهیزات دیجیتال و رایانه‌های پرسرعت، امکان بهره‌گیری از روش‌های عددی در حل مسائل مختلف را، به‌آسانی فراهم کرده است. در این جا، با توجه به لزوم شبیه‌سازی انتشار امواج از روش تفاضل محدود در حوزه زمان به عنوان ابزاری پر قدرت در تحلیل مسائل الکترومغناطیس، استفاده شده است. این روش، روشی بر اساس معادلات ماکسول است که در آن معادلات دیفرانسیل با معادلات تفاضل محدود تقریبی جایگزین می‌شوند. این تقریب‌ها مقدار یک متغیر وابسته را در یک نقطه در محدوده موردنظر، به مقادیر نقاط همسایه ارتباط می‌دهد. در این روش، فضای شبیه‌سازی به سلول‌های بسیار ریز تقسیم‌بندی می‌شود. متناسب با ابعاد فضای شبیه‌سازی، اندازه این سلول‌ها نیز تعیین می‌شود. در طرح دوبعدی موردنظر ما، سلول‌ها دوبعدی خواهند بود و Δx ، Δy گام‌های مکانی هستند که در شبیه‌سازی‌های این مقاله، به اندازه ۵ نانومتر انتخاب شده‌اند. در این روش عددی، از توزیع پیوسته‌ی میدان‌های الکترومغناطیسی در یک حجم محدود از فضا، در نقاط مشخصی از شبکه فضایی و زمانی، نمونه‌برداری می‌شود. انتشار میدان‌های الکترومغناطیسی با پیشروی گام به گام زمان و تکرار معادله‌های تفاضلی در همه نقاط در شبکه فضایی، مدل می‌شود. در این روش، هم زمان و هم مکان گسسته می‌شود. همچنین، برای مدل‌سازی انتشار در فضای نامحدود، نیاز به مرز جاذب مناسب است. این مرز جاذب باید به‌گونه‌ای باشد که تنها امکان جذب موج وجود داشته باشد و تا حد مورد نیاز از بازتاب جلوگیری نماید. در این مقاله، از لایه‌های جاذب در شبیه‌سازی‌ها استفاده شده است. برای اجرای الگوریتم تفاضل محدود در حوزه زمان مورد نیاز این مقاله، کدی در نرم‌افزار متلب نوشته شده است که منحنی طیف نسبت انتقال توان در موجبر خروجی در شکل ۲ مشاهده می‌شود. طیف توان شکل ۲ از طیف نسبت توان خروجی به ورودی ساختار به‌دست آمده است. این طیف توان، از اعمال تبدیل فوریه بر نمونه‌های زمانی توان‌های الکترومغناطیس ظاهر شده در ورودی و خروجی به‌دست آمده است. به‌وضوح پاسخ میان‌گذر ساختار قابل مشاهده است [۱۰].



شکل ۲: طیف نسبت انتقال توان ساختار فیلتر موجبری مورد بررسی [۱۰]

ششمین همایش ملی ریاضی و آمار

<https://conf.gonbad.ac.ir/msc1404>



شکل ۳: طیف نسبت انتقال توان ساختار فیلتر موجبری مورد بررسی با تغییر در شعاع تشدیدگر [۱۰]

شکل ۳، نشان دهنده تغییرات طول موج کار ساختار، نسبت به تغییر در شعاع تشدیدگر است. بنابراین انتظار خواهیم داشت که تلورانس خطا در مراحل ساخت نیز، منجر به تغییر طول موج کار ساختار نسبت به طول موج طراحی شود. در ادامه، به تحلیل آماری ساختار از منظر تلورانس ساخت ابعاد ساختاری، به ویژه شعاع تشدیدگر، می پردازیم. برای تحلیل آماری مد نظر و برای بررسی عدم قطعیت در ابعاد و پارامترهای ساختاری نیز، از نتایج شبیه سازی با روش تفاضل محدود در حوزه زمان استفاده می شود. کد شبیه سازی عددی تفاضل محدود در حوزه زمان که برای مدل یقینی^۱ تهیه شده، برای دست یابی به بردار نمونه های با تعداد بسیار زیاد استفاده شده است. با به کارگیری تعداد نمونه بسیار زیاد، تابع توزیع احتمال (پی دی اف)^۲ برای این پاسخ (تغییرات طول موج مرکزی با تغییر در شعاع تشدیدگر دایروی) می تواند به درستی تخمین زده شود. انحراف معیار σ برای هر بردار تصادفی u ، توسط رابطه زیر تعیین می شود [۹]:

$$\sigma(u) = \sqrt{\frac{1}{M-1} \left[\sum_{j=1}^M u^2(j) - M \times A^2(u) \right]} \quad (2)$$

که در آن $A(u)$ ، میانگین نمونه ها است که به صورت زیر محاسبه می شود [۹]:

$$A(u) = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M u(j) \quad (3)$$

برای تحلیل آماری و دست یابی به شاخص های مربوطه، تعداد ۱۰۰۰۰ نمونه (M) از مقادیر مختلف شعاع تشدیدگر، برای مقادیر عدم قطعیت با تلورانس های ۲، ۵، و ۱۰ درصد، مقادیر طول موج تشدید برگرفته از شبیه سازی به روش تفاضل محدود در حوزه زمان محاسبه شدند. بر این اساس، شاخص های میانگین و انحراف معیار برای طول موج کار ساختار به دست آمدند که همگی در جدول ۱ خلاصه شده اند. برای رعایت اختصار، نتایج تنها برای مد اول تشدید (مطابق با شکل های ۲ و ۳) بیان شده اند. همان گونه که مشاهده می شود، افزایش تلورانس در مقدار شعاع، منجر به افزایش تغییر در طول موج مرکزی می شود به گونه ای که انحراف معیار ۶/۸ نانومتر به ۷۲/۴ نانومتر می رسد. در واقع افزایش در میزان تلورانس، منجر به افزایش میزان انحراف معیار نسبت به حالت یقینی (مقدار طراحی) می شود. بر اساس مقادیر موجود در جدول ۱، تابع توزیع احتمال برای مقادیر مختلف تلورانس در شعاع تشدیدگر، نسبت به طول موج طراحی، در شکل ۳ رسم شده است. همان گونه که مشاهده می شود، برای مقادیر کم از عدم قطعیت (تلورانس کم)، مقدار احتمال بالایی در پهنای باند کم دارد. برای مثال، با میزان تلورانس ۱ درصد، تابع توزیع احتمال بین ۷۹۱،۴ و ۸۰۵ نانومتر قرار دارد. با افزایش میزان تلورانس، توزیع احتمال بر بازه وسیع تری از مقادیر طول موج گسترش می یابد که به معنی نوسانات بیشتر و عدم قطعیت بیشتر است.

¹ Deterministic

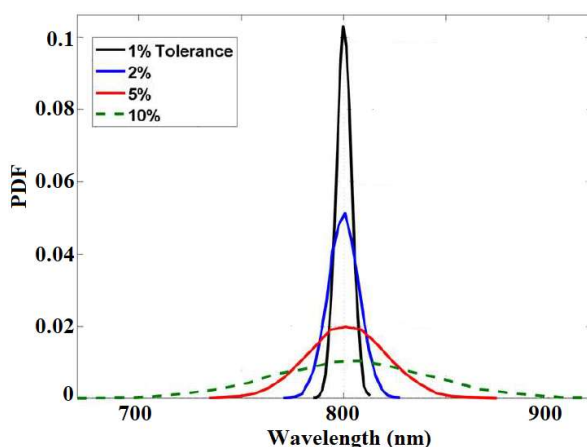
² Probability Distribution Function (PDF)

ششمین همایش ملی ریاضی و آمار

<https://conf.gonbad.ac.ir/msc1404>

جدول ۱: مقادیر میانگین و انحراف معیار برای تلورانس‌های مختلف از شعاع تشدیدگر ساختار شکل ۱

تلورانس	میانگین (نانومتر)	انحراف معیار (نانومتر)	نسبت انحراف معیار به میانگین (درصد)
۱ درصد	۷۹۸/۲	۶/۸	۰/۸۵
۲ درصد	۷۹۰/۷	۱۴/۳	۱/۸۱
۵ درصد	۷۶۹/۸	۳۵/۲	۴/۵۷
۱۰ درصد	۷۳۲/۶	۷۲/۴	۹/۸۸



شکل ۴: تابع توزیع احتمال برای مقادیر مختلف تلورانس در شعاع تشدیدگر، بر حسب طول موج

۴- بحث و نتیجه‌گیری

در این مقاله، ضمن مروری بر عملکرد یک فیلتر موجبری پلاسمونی شامل تشدیدگر دایروی، عدم قطعیت ناشی از پارامتر ساختاری شعاع تشدیدگر که ناشی از تلورانس خطا در مراحل ساخت است، بررسی شد. برای این منظور، انحراف معیار و تابع توزیع احتمال برای طول موج کار ساختار مطالعه شدند. تحلیل‌های آماری یاد شده و شبیه‌سازی‌ها، توسط روش عددی تفاضل محدود در حوزه زمان به دست آمده‌اند. مطالعه آماری این ساختار که می‌تواند در طراحی مدارهای مجتمع نوری به کار گرفته شود، در تعیین میزان مجاز تلورانس خطا در فرآیند ساخت مفید است.

۵- مراجع

- [1] Barnes W., Dereus A., and Ebbesen T. (2003), Surface plasmon subwavelength optics, *Nature*, 424, 824-830.
- [2] Ozbay E. (2006), Plasmonic: merging photonics and electronics at nanoscale dimensions, *Science*, 311, 189-193.
- [3] Hu F., Yi H., and Zhou Z. (2011), Band-pass plasmonic slot filter with band selection and spectrally splitting capabilities, *Opt. Express*, 19, 4848-4855.
- [4] Setayesh A., Mirnaziry S.R., and Abrishamian M.S. (2011), Numerical investigation of tunable band-pass/band-stop plasmonic filters with hollow-core circular ring resonator, *J. Opt. Soc. Korea*, 15, 82-89.
- [5] Maksymov I.S. (2011), Optical switching and logic gates with hybrid plasmonic-photonic crystal nanobeam cavities, *Phys. Lett. A*, 375, 918-921.
- [6] Yabu T., Geshibo M., Kitamura T., Nishida K., and Sawa S. (2009), All-optical logic gates containing a two-mode nonlinear waveguide, *IEEE J. Quantum Electron.* 38, 37-46.



ششمین همایش ملی ریاضی و آمار

<https://conf.gonbad.ac.ir/msc1404>

- [7] Dolatabady A., and Granpayeh N. (2015), L-shaped filter, mode separator and power divider based on plasmonic waveguides with nanocavity resonators, *IET Optoelectron.* 9, 289-293.
- [8] Lu H., Liu X., Mao D., Wang L., and Gong Y. (2010), Tunable band-pass plasmonic waveguide filters with nanodisk resonators, *Opt. Express*, 18, 17922-17927.
- [9] Wafa M.I., El-Batawy Y.M., and El-Naggar S.A. (2020), Stochastic analysis for one dimensional photonic crystals, *Optik*, 208, 164106.

[۱۰] دولت‌آبادی، ع. (۱۳۹۰)، تحلیل، طراحی و شبیه‌سازی فیلتر موج‌بری میان‌گذر پلاسمونی شامل محفظه دیسک شکل، پایان‌نامه کارشناسی ارشد، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی.

ششمین همایش ملی ریاضی و آمار

<https://conf.gonbad.ac.ir/msc1404>

F-167، صص ۱۲۱-۱۲۷.

چارچوب ترکیبی GNN-Fuzzy AHP برای ارزیابی و رتبه‌بندی تأمین‌کنندگان

مریم مهرپرور^۱

استادیار ریاضی کاربردی، دانشگاه بزرگمهر قاینات، mmehrparvar@buqaen.ac.ir

چکیده

ارزیابی و انتخاب تأمین‌کنندگان از تصمیمات راهبردی در مدیریت زنجیره تأمین است، اما بسیاری از رویکردهای رایج چندمعیاره عمدتاً بر شاخص‌های عملکردی (مانند هزینه، کیفیت و ظرفیت) تکیه دارند و نقش «جایگاه شبکه‌ای» تأمین‌کنندگان و اثرات سرایتی اختلالات در شبکه تأمین را نادیده می‌گیرند. این پژوهش با هدف رفع این خلأ، چارچوبی ترکیبی مبتنی بر شبکه‌های عصبی گرافی و فرایند تحلیل سلسله‌مراتبی فازی برای ارزیابی و رتبه‌بندی تأمین‌کنندگان در شبکه‌های بزرگ مقیاس ارائه می‌کند. در این چارچوب، شبکه تأمین به صورت گراف وزن‌دار مدل‌سازی می‌شود؛ سپس با استفاده از یک رمزگذار هم‌نهشتی گرافی، نمایش برداری گره‌ها استخراج و «امتیاز ساختاری» هر تأمین‌کننده بر اساس اطلاعات همسایگی و ویژگی‌های ساختاری (مانند درجه و انواع مرکزیت) محاسبه می‌گردد. هم‌زمان، ترجیحات خبرگان از طریق مقایسات زوجی فازی گردآوری و وزن معیارها و زیرمعیارها با فرایند تحلیل سلسله‌مراتبی فازی به‌دست می‌آید. در نهایت، امتیاز عملکردی و امتیاز ساختاری با یک پارامتر تنظیم‌گر ادغام شده و رتبه‌بندی نهایی انجام می‌شود. نتایج نشان می‌دهد ادغام هم‌زمان اطلاعات شبکه و قضاوت خبرگان، تصویری جامع‌تر از وضعیت تأمین‌کنندگان فراهم کرده و شناسایی تأمین‌کنندگان راهبردی را برای طراحی سبد تأمین، مدیریت ریسک و افزایش تاب‌آوری تسهیل می‌کند.

کلمات کلیدی: شبکه عصبی گرافی؛ فرایند تحلیل سلسله‌مراتبی فازی؛ ارزیابی تأمین‌کنندگان؛ زنجیره تأمین؛ تحلیل شبکه.

۱- مقدمه

مدیریت تأمین‌کنندگان و انتخاب مجموعه‌ای بهینه از آن‌ها یکی از تصمیمات راهبردی در مدیریت زنجیره تأمین است. رویکردهای سنتی ارزیابی تأمین‌کنندگان عمدتاً بر معیارهای فردی مانند هزینه، کیفیت و زمان تحویل تمرکز داشته‌اند و ساختار شبکه‌ای روابط میان تأمین‌کنندگان را نادیده گرفته‌اند. با این حال، اختلال در عملکرد یک تأمین‌کننده می‌تواند اثرات سرایتی گسترده‌ای در کل شبکه ایجاد کند؛ بنابراین لازم است جایگاه شبکه‌ای تأمین‌کنندگان نیز در ارزیابی مورد توجه قرار گیرد. در این پژوهش، با ترکیب یک مدل شبکه عصبی گرافی^۱ و فرایند تحلیل سلسله‌مراتبی فازی^۲، چارچوبی ارائه می‌شود که هم‌زمان اطلاعات ساختاری شبکه و ترجیحات خبرگان را برای ارزیابی و رتبه‌بندی تأمین‌کنندگان به کار می‌گیرد.

پژوهش‌های مربوط به ارزیابی و انتخاب تأمین‌کنندگان، طی دهه‌های اخیر از رویکردهای ساده تک‌معیاره به چارچوب‌های چندمعیاره و ترکیبی تحول یافته‌اند. مطالعات کلاسیکی مانند کار دیکسون، مجموعه‌ای گسترده از معیارهای تأمین‌کننده (از جمله کیفیت، تحویل، قیمت و سابقه عملکرد) را شناسایی کرده‌اند و بر اهمیت نگاه نظام‌مند به تصمیم‌گیری در انتخاب تأمین‌کننده تأکید نموده‌اند. مرورهای جامع بعدی نیز نشان می‌دهد که معیارهای کیفیت و تحویل در اغلب مطالعات تجربی به‌عنوان مهم‌ترین عوامل در تصمیم‌گیری مدیران خرید گزارش می‌شوند و هزینه معمولاً در کنار این معیارها و نه به‌صورت معیار یگانه مورد توجه قرار می‌گیرد. [6-8]

¹ GNN

² Fuzzy AHP

ششمین همایش ملی ریاضی و آمار

<https://conf.gonbad.ac.ir/msc1404>

با گسترش رویکردهای تصمیم‌گیری چندمعیاره، روش‌هایی مانند ANP، AHP و TOPSIS و روش‌های فازی مرتبط با آن‌ها به‌طور گسترده در انتخاب تأمین‌کننده به‌کار گرفته شده‌اند. در این میان، فرایند تحلیل سلسله‌مراتبی فازی به دلیل توانایی در مدلسازی عدم قطعیت و ابهام موجود در قضاوت خبرگان، به‌عنوان یکی از ابزارهای رایج در وزن‌دهی به معیارها و ارزیابی گزینه‌ها شناخته شده است. نتایج بسیاری از این مطالعات نشان می‌دهد که استفاده از اعداد فازی می‌تواند پایداری و واقع‌گرایی وزن‌های به‌دست‌آمده را نسبت به فرایند تحلیل سلسله‌مراتبی کلاسیک افزایش دهد و فضای تصمیم‌گیری را بیشتر با ماهیت زبانی قضاوت‌های انسانی سازگار کند. [1,2,9,12,14]

در سال‌های اخیر، توجه فزاینده‌ای به ساختار شبکه‌ای روابط تأمین‌کنندگان و اثرات سیستمی اختلالات در زنجیره تأمین شده است. رویکردهای مبتنی بر گراف و تحلیل شبکه‌های پیچیده، امکان مدلسازی روابط چندلایه و وابستگی‌های متقابل بین تأمین‌کنندگان را فراهم کرده‌اند. در این چارچوب، شاخص‌هایی مانند درجه، مرکزیت بینابینی و نزدیکی برای شناسایی گره‌های کلیدی مورد استفاده قرار گرفته‌اند؛ با این حال، این شاخص‌ها اغلب خطی و ایستا هستند و توان محدودی در یادگیری الگوهای پیچیده‌تر در شبکه دارند. [3,11]

شبکه‌های عصبی گرافی نسل جدیدی از مدل‌های یادگیری عمیق هستند که با تعمیم عملیات هم‌نهستی به داده‌های گرافی، امکان استخراج خودکار نمایش‌های برداری غنی از گره‌ها و یال‌ها را فراهم می‌کنند.

معماری‌هایی مانند شبکه عصبی گرافی از نوع هم‌نهستی^۱ نشان داده‌اند که می‌توانند اطلاعات موضعی و جهانی شبکه را به‌صورت هم‌زمان در لایه‌های مختلف مدل تجمیع کنند و برای وظایفی نظیر طبقه‌بندی گره‌ها، پیش‌بینی پیوندها و خوشه‌بندی گره‌ها عملکرد مطلوبی ارائه دهند. در حوزه زنجیره تأمین، استفاده از GNN هنوز نسبتاً نوظهور است، اما مطالعات اولیه حاکی از ظرفیت بالای این مدل‌ها برای شناسایی تأمین‌کنندگان راهبردی و تحلیل ریسک‌های سیستمی است. [10,13]

مرور ادبیات نشان می‌دهد که اگرچه روش‌های فازی و چندمعیاره در ارزیابی تأمین‌کنندگان به‌خوبی توسعه یافته‌اند و رویکردهای گراف‌محور نیز به‌تدریج در تحلیل شبکه‌های تأمین به‌کار گرفته می‌شوند، اما تعداد مطالعاتی که این دو جریان را به‌صورت یکپارچه ترکیب کنند هنوز محدود است. اغلب پژوهش‌ها یا بر وزن‌دهی و امتیازدهی بر اساس معیارهای سنتی تمرکز دارند و ساختار شبکه‌ای را نادیده می‌گیرند، یا صرفاً به تحلیل شبکه بدون در نظر گرفتن ترجیحات مدیران و معیارهای چندگانه بسنده می‌کنند. از این رو، خلأ پژوهشی مهمی در زمینه توسعه چارچوب‌های ترکیبی وجود دارد که بتوانند هم‌زمان از مزایای مدل‌های یادگیری عمیق گرافی و روش‌های تصمیم‌گیری چندمعیاره فازی بهره بگیرند. چارچوب پیشنهادی در این پژوهش در پاسخ به همین خلأ طراحی شده است. [5,15]

۲- تعریف مسئله و روش شناسی

در این بخش، مسئله اصلی پژوهش، اهداف و سؤالات تحقیق تبیین می‌شود. سپس ساختار سلسله‌مراتبی معیارها و زیرمعیارهای ارزیابی تأمین‌کنندگان و همچنین نقش اطلاعات شبکه‌ای در تصمیم‌گیری تشریح شده و چارچوب مفهومی ترکیب GNN و Fuzzy AHP به‌صورت شماتیک معرفی می‌شود.

این پژوهش از نظر هدف کاربردی و از نظر ماهیت توصیفی-تحلیلی است و یک چارچوب ترکیبی داده‌محور و خبره‌محور برای ارزیابی و رتبه‌بندی تأمین‌کنندگان در یک شبکه بزرگ‌مقیاس ارائه می‌کند. در این چارچوب ساختار شبکه تأمین با مدل‌سازی گرافی نمایش داده می‌شود، اهمیت ساختاری تأمین‌کنندگان با شبکه عصبی گرافی به دست می‌آید و ترجیحات تصمیم‌گیرندگان با فرایند تحلیل سلسله‌مراتبی فازی در نظر گرفته می‌شود.

جامعه شبکه‌ای پژوهش، تأمین‌کنندگان و روابط بین آن‌ها در زنجیره تأمین یک بنگاه صنعتی است که در قالب یک گراف

¹ Graph Convolutional Networks(GCN)

ششمین همایش ملی ریاضی و آمار

<https://conf.gonbad.ac.ir/msc1404>

وزن دار مدل سازی شده است؛ هر گره یک تأمین کننده و هر یال بیانگر وجود رابطه تأمین یا جریان مبادله بین دو تأمین کننده است. اطلاعات مربوط به گره ها و یال ها از سوابق خرید و پایگاه های داده سازمانی استخراج و پس از پاک سازی در قالب ماتریس مجاورت و ماتریس ویژگی گره ها برای ورود به مدل آماده شده است. جامعه خبرگان نیز مدیران و متخصصان حوزه تأمین و لجستیک با حداقل پنج سال سابقه کاری هستند که به صورت نمونه گیری هدفمند انتخاب شده اند.

در این پژوهش، شبکه تأمین به صورت یک گراف وزن دار $G=(V,E,W)$ مدل می شود که در آن V مجموعه تأمین کنندگان، E مجموعه روابط تأمین/مبادله و W وزن یال ها است. ماتریس مجاورت A به گونه ای تعریف می شود که $A_{ij} = W_{ij}$ (برای مثال حجم/تعداد تراکنش یا شدت رابطه بین i و j) و در صورت نبود اطلاعات وزنی، $A_{ij} = 1$ در نظر گرفته می شود. برای پایداری محاسبات و لحاظ کردن خود-ارتباط، ابتدا حلقه های خودی اضافه و سپس نرمال سازی متقارن انجام می شود

$$\begin{aligned}\tilde{A} &= A + I \\ D_{ii} &= \sum_{j=1}^n \tilde{A}_{ij} \\ \tilde{A} &= \tilde{D}^{-\frac{1}{2}} \cdot \tilde{A} \cdot \tilde{D}^{-\frac{1}{2}} \\ \tilde{D}^{-\frac{1}{2}} &= \text{diag}\left(\frac{1}{\sqrt{D_{11}}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{D_{nn}}}\right)\end{aligned}$$

ویژگی های گره ها در ماتریس X قرار می گیرند؛ هر سطر X_i ویژگی های تأمین کننده i را نشان می دهد. برای جلوگیری از هم پوشانی با «امتیاز عملکردی» (که جداگانه با Fuzzy AHP محاسبه می شود)، در این مرحله X صرفاً از ویژگی های ساختاری استخراج می شود؛ به عنوان نمونه درجه، درجه وزن دار، مرکزیت بینابینی، مرکزیت نزدیکی و ضریب خوشه بندی. در صورت وجود برچسب های مدیریتی (برای مثال «تأمین کننده راهبردی/غیراستراتژیک» یا طبقات ریسک)، همین رمزگذار GCN می تواند به صورت نیمه نظارتی نیز آموزش داده شود و خروجی طبقه بندی برای استخراج امتیاز ساختاری به کار رود. در گام مدل سازی شبکه، داده های ساختاری به صورت ماتریس مجاورت A و بردارهای ویژگی X برای گره ها تعریف می شود. سپس یک شبکه عصبی گرافی از نوع هم نهشتی با یک یا دو لایه پنهان طراحی می گردد که در آن هر لایه با استفاده از ماتریس مجاورت نرمال شده، اطلاعات همسایگی را تجمیع کرده و نمایش برداری هر گره را به روزسانی می کند. مدل بسته به نوع داده های در دسترس، به صورت نیمه نظارتی یا بدون نظارت آموزش داده می شود و در نهایت برای هر تأمین کننده یک بردار ویژگی نهایی به دست می آید که با استفاده از آن یک امتیاز ساختاری (مثلاً از طریق یک تابع امتیازدهی یا نرم بردار) محاسبه و به صورت S_{GNN} ذخیره می شود.

برای لحاظ کردن ترجیحات تصمیم گیرندگان، ابتدا ساختار سلسله مراتبی ارزیابی تأمین کنندگان شامل هدف، معیارهای اصلی (مانند کیفیت، هزینه، تحویل، انعطاف پذیری، ریسک و پایداری) و زیرمعیارهای مربوطه تدوین می شود. سپس پرسشنامه مقایسه زوجی فازی بر اساس اعداد فازی مثلثی طراحی و در اختیار خبرگان قرار می گیرد. پاسخ ها برای هر سطح به ماتریس های مقایسه زوجی فازی تبدیل و با استفاده از میانگین هندسی فازی تجمیع می شوند. وزن فازی معیارها و زیرمعیارها محاسبه، غیرفازی سازی و نرمال سازی می گردد تا بردار نهایی وزن ها S_{fuzzy} به دست آید؛ نرخ ناسازگاری نیز کنترل می شود تا از منطق قضاوت ها اطمینان حاصل شود.

در گام نهایی، امتیاز تأمین کنندگان بر اساس عملکرد آن ها در معیارهای مختلف و وزن های Fuzzy AHP محاسبه و به صورت $S_{fuzzy}(i)$ نمایش داده می شود. این امتیاز با امتیاز ساختاری حاصل از GNN ترکیب می گردد؛ بدین صورت که برای هر تأمین کننده i امتیاز نهایی از رابطه $S_{final}(i) = \alpha S_{fuzzy}(i) + (1 - \alpha) S_{GNN}(i)$ به دست می آید، که در آن

ششمین همایش ملی ریاضی و آمار

<https://conf.gonbad.ac.ir/msc1404>

α بین صفر و یک، نقش نسبی ترجیحات خبرگان و ساختار شبکه را تنظیم می کند. تأمین کنندگان بر اساس امتیاز نهایی مرتب و رتبه بندی می شوند. حال برای درک بهتر مطالب به حل یک مثال ساده می پردازیم:

مثال: فرض کنید می خواهیم ۴ تأمین کننده (A, B, C, D) که رابطه آنها (مجموعه یالها) به صورت $E = \{(A, B), (B, C), (B, D), (A, D)\}$ تعریف می شود (که در جدول ۱ آماده است) را با توجه به معیارهای (کیفیت،

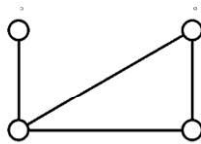
قیمت و ظرفیت) رتبه بندی کنیم؟

بنابراین درجه ها به ترتیب $\deg(A)=2, \deg(B)=3, \deg(C)=1, \deg(D)=2$ بوده است.

جدول ۱: رابطه بین تأمین کننده ها

	A	B	C	D
A	.	۱	.	۱
B	۱	.	۱	۱
C	.	۱	.	.
D	۱	۱	.	.

برای این منظور گراف تأمین کنندگان و نوع رابطه آنها به صورت زیر است:



شکل ۱- گراف مثال

پس داریم:

$$\sum degree = 8$$

و

$$S_{GNN} = [0.25, 0.375, 0.125, 0.25]$$

و ماتریس مقایسه زوجی فازی معیارها با توجه به نظرات خبرگان به صورت زیر است:

جدول ۲: ماتریس مقایسه معیارها

	C_1 (قیمت)	C_2 (کیفیت)	C_3 (ظرفیت)	مجموع سطری
C_1	(1,1,1)	(1.5,2,2.5)	(3.5,4,4.5)	(6,7,8)
C_2	(1/2.5, 1/2, 1/1.5)	(1,1,1)	(2.5,3,3.5)	(3.9,4.5,5.167)
C_3	(1/4.5, 1/4, 1/3.5)	(1/3.5, 1/3, 1/2.5)	(1,1,1)	(1.5079, 1.5833, 1.6857)

با استفاده از روش چانگ نافازی سازی و وزنهای نهایی را تعیین می کنیم:

جدول ۳: وزن نهایی

وزن نهایی و نرمال شده

w_1	0.5337
w_2	0.3448

ششمین همایش ملی ریاضی و آمار

<https://conf.gonbad.ac.ir/msc1404>

w_3

0.1214

که $w_1 + w_2 + w_3 \approx 1$. حال اگر عملکرد عددی هر تامین کننده نسبت به معیارها به صورت زیر باشد:

جدول ۴: عملکرد عددی تامین کننده‌ها

	C_1 (قیمت)	C_2 (کیفیت)	C_3 (ظرفیت)
A	70	85	80
B	60	80	90
C	65	78	75
D	80	70	60

برای نرمال سازی داده‌ها، در دو معیار ظرفیت و کیفیت بزرگترین داده را انتخاب می‌کنیم و برای هزینه، کمترین هزینه را انتخاب و سپس نرمال سازی می‌کنیم و سپس امتیاز هر تامین کننده را از رابطه زیر تعیین می‌کنیم:

جدول ۵: نرمال سازی عملکرد

	C_1 (قیمت)	C_2 (کیفیت)	C_3 (ظرفیت)
A	۰,۸۶	۱	۰,۸۹
B	۱	۰,۹۴	۱
C	۰,۹۲	۰,۹۲	۰,۸۳
D	۰,۷۵	۰,۸۲	۰,۶۷

$$S_{fuzzy}(i) = \sum_{j=1}^3 w_j \cdot C_j \quad i = A, \dots, D$$

$$S_{fuzzy}(A) = 0.923, S_{fuzzy}(B) = 0.979, S_{fuzzy}(C) = 0.873, S_{fuzzy}(D) = 0.731$$

و در آخرین مرحله وزنهای بدست آمده را ادغام و وزن نهایی را تعیین می‌کنیم:

اگر $\alpha = 0.6$ فرض شود، داریم:

$$S_{final}(i) = 0.4S_{GNN}(i) + 0.6S_{fuzzy}(i)$$

α	S_{final}
$\alpha = 0.6$	
A	0.6538
B	0.7378
C	0.5738
D	0.4885

که در آن $B > A > C > D$

حال اگر $\alpha = 0.1$ فرض شود، داریم:

$$S_{final}(i) = 0.9S_{GNN}(i) + 0.1S_{fuzzy}(i)$$

ششمین همایش ملی ریاضی و آمار

<https://conf.gonbad.ac.ir/msc1404>

α	S_{final}
$= 0.1$	
A	0.3173
B	0.4355
C	0.1998
D	0.2980

که در آن $B > A > D > C$.

۳- نتیجه گیری

در این پژوهش، چارچوبی ترکیبی مبتنی بر شبکه عصبی گرافی و فرایند تحلیل سلسله‌مراتبی فازی برای ارزیابی و رتبه‌بندی تأمین‌کنندگان در یک شبکه تأمین بزرگ‌مقیاس ارائه شد. با مدل‌سازی ساختار شبکه تأمین در قالب گراف و بهره‌گیری از GNN، اهمیت ساختاری تأمین‌کنندگان از منظر جایگاه شبکه‌ای آن‌ها استخراج گردید و با استفاده از Fuzzy AHP، ترجیحات تصمیم‌گیرندگان در قالب وزن معیارها و زیرمعیارها وارد مدل شد. نتایج نشان داد که ترکیب این دو منبع اطلاعاتی می‌تواند تصویری جامع‌تر از وضعیت تأمین‌کنندگان ارائه دهد و به شناسایی تأمین‌کنندگان راهبردی کمک کند. این چارچوب می‌تواند به‌عنوان ابزاری تحلیلی برای طراحی سبد تأمین‌کنندگان، مدیریت ریسک و افزایش تاب‌آوری زنجیره تأمین مورد استفاده مدیران قرار گیرد.

این پژوهش نیز همانند سایر مطالعات با محدودیت‌هایی مواجه است. یکی از محدودیت‌ها، وابستگی نتایج به کیفیت و جامعیت داده‌های شبکه‌ای و اطلاعات عملکردی تأمین‌کنندگان است. همچنین، وزن‌دهی معیارها بر اساس قضاوت گروهی محدودی از خبرگان انجام شده است و ممکن است در صنایع یا سازمان‌های دیگر نیاز به بازنگری و بومی‌سازی داشته باشد. از منظر روش‌شناختی، استفاده از یک نوع معماری GNN و یک روش مشخص Fuzzy AHP می‌تواند در مطالعات آینده با مدل‌های پیشرفته‌تر یا ترکیب با سایر روش‌های تصمیم‌گیری چندمعیاره مقایسه شود. پیشنهاد می‌شود در پژوهش‌های آتی، کاربرد این چارچوب در صنایع مختلف، استفاده از داده‌های پویا، توسعه سناریوهای ریسک و به‌کارگیری رویکردهای توضیح‌پذیری برای تفسیر بهتر خروجی مدل‌های گرافی مورد توجه قرار گیرد.

۴- مراجع

- [1] Amid, A., Ghodsypour, S. H., & O'Brien, C. (2006). Fuzzy multiobjective linear model for supplier selection in a supply chain. *International Journal of Production Economics*, 104(2), 394–407.
- [2] Bozdag, E., Kahraman, C., & Ruan, D. (2003). Fuzzy group decision making for selection among computer integrated manufacturing systems. *Computers in Industry*, 51(1), 13–29.
- [3] Borgatti, S. P., & Li, X. (2009). On social network analysis in a supply chain context. *Journal of Supply Chain Management*, 45(2), 5–22.
- [4] Chan, F. T. S. (2003). Interactive selection model for supplier selection process: An analytical hierarchy process approach. *International Journal of Production Research*, 41(15), 3549–3579.
- [5] Chen, X., Wang, Y., & Zhao, L. (2022). Graph-based fuzzy decision models for resilient supplier selection under disruption risks. *International Journal of Production Research*, 60(12), 3651–3672.
- [6] De Boer, L., Labro, E., & Morlacchi, P. (2001). A review of methods supporting supplier selection. *European Journal of Purchasing & Supply Management*, 7(2), 75–89.
- [7] Dickson, G. W. (1966). An analysis of vendor selection systems and decisions. *Journal of Purchasing*, 2(1), 5–17.
- [8] Ho, W., Xu, X., & Dey, P. K. (2010). Multi-criteria decision making approaches for supplier evaluation and selection: A literature review. *European Journal of Operational Research*, 202(1), 16–24.



ششمین همایش ملی ریاضی و آمار

<https://conf.gonbad.ac.ir/msc1404>

- [9] Kahraman, C., Cebeci, U., & Ruan, D. (2004). Multi-criteria supplier selection using fuzzy AHP. *Logistics Information Management*, 16(6), 382–394.
- [10] Kipf, T. N., & Welling, M. (2017). Semi-supervised classification with graph convolutional networks. In *International Conference on Learning Representations (ICLR)*.
- [11] Pathak, S. D., Dilts, D. M., & Mahadevan, S. (2007). Investigating population and topological evolution in a complex adaptive supply network. *Journal of Supply Chain Management*, 43(3), 27–39.
- [12] Saaty, T. L. (1980). *The analytic hierarchy process*. McGraw-Hill.
- [13] Wu, Z., Pan, S., Chen, F., Long, G., Zhang, C., & Yu, P. S. (2020). A comprehensive survey on graph neural networks. *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, 32(1), 4–24.
- [14] Zadeh, L. A. (1965). Fuzzy sets. *Information and Control*, 8(3), 338–353.
- [15] Zhang, Y., & Li, M. (2023). Hybrid GNN–fuzzy decision frameworks for multi-criteria supplier evaluation. *Computers & Industrial Engineering*, 177, 108013.



ششمین همایش ملی ریاضی و آمار

<https://conf.gonbad.ac.ir/msc1404>

F-176، صص ۱۲۸-۱۳۲.

آسیب‌شناسی شناختی آموزش هندسه در دوره متوسطه دوم با تأکید بر رویکردهای نوین تطبیقی

هاشم فلاح نژاد^۱، آزاده میرزایی مقدم^۲

^۱ math.computer.2014@gmail.com

^۲ azade89.mirzaei@gmail.com

چکیده

هندسه به‌عنوان یکی از بنیادی‌ترین شاخه‌های ریاضیات، نقشی کلیدی در پرورش تفکر منطقی، تجسم فضایی و استدلال قیاسی ایفا می‌کند. با این حال، آموزش هندسه در دوره متوسطه دوم با چالشی ساختاری مواجه است که خود را در قالب گسست میان شهود هندسی دانش‌آموزان و فهم صوری برهان نشان می‌دهد. پژوهش حاضر با رویکرد توصیفی-تحلیلی و با اتکا بر چارچوب‌های نظری «سطوح تفکر هندسی وان‌هیل» و «نظریه مفاهیم فیگورال فیش‌بین»، به واکاوی ریشه‌های شناختی، آموزشی و فناورانه این مسئله می‌پردازد. نتایج نشان می‌دهد که ناهماهنگی سطح تدریس با سطح تفکر یادگیرندگان، غلبه فهم ابزاری بر فهم رابطه‌ای، و ضعف در پیوند دادن بازنمایی‌های بصری با ساختارهای صوری، از عوامل اصلی ناکارآمدی آموزش هندسه‌اند. در ادامه، با تحلیل تطبیقی نظام‌های آموزشی منتخب و بررسی نقش فناوری‌های نوین از جمله نرم‌افزارهای هندسه پویا، هوش مصنوعی و واقعیت افزوده، راهبردهایی برای ترمیم شکاف میان شهود و برهان ارائه می‌شود.

کلمات کلیدی: آموزش هندسه؛ سطوح وان‌هیل؛ مفاهیم فیگورال؛ هوش مصنوعی؛ واقعیت افزوده؛ هندسه پویا.

۱- مقدمه

هندسه در میان شاخه‌های مختلف ریاضیات، جایگاهی یگانه دارد؛ زیرا در آن، ادراک بصری، تجربه فضایی و استدلال قیاسی به‌طور هم‌زمان فعال می‌شوند. این هم‌نشینی شهود و منطق، هندسه را به بستری مناسب برای گذار تدریجی از تفکر حسی شهودی به تفکر انتزاعی بدل می‌سازد. با این وجود، شواهد پژوهشی و تجربیات معلمان نشان می‌دهد که بسیاری از دانش‌آموزان دوره متوسطه دوم در فهم مفاهیم هندسی و به‌ویژه درک و تولید برهان با دشواری‌های جدی مواجه‌اند. یکی از دلایل اصلی این وضعیت، گسست ناگهانی میان تجربه‌های شهودی دوره‌های پیشین و زبان صوری اثبات در دوره متوسطه دوم است. آموزش رسمی هندسه غالباً بر ارائه تعاریف دقیق، نمادگذاری صوری و برهان‌های استاندارد تأکید می‌کند، بی‌آنکه فرصت کافی برای درونی‌سازی مفاهیم و طی مراحل شناختی لازم فراهم شود. این امر نوعی «شوک معرفت‌شناختی» ایجاد می‌کند که در آن، دانش‌آموزان نه‌تنها معنای برهان را درک نمی‌کنند، بلکه نسبت به ضرورت آن نیز دچار تردید می‌شوند. پژوهش حاضر می‌کوشد با تکیه بر نظریه‌های شناختی معتبر و تحلیل تطبیقی رویکردهای نوین آموزشی، این بحران را تبیین و مسیرهای اصلاح آن را ترسیم کند.

ششمین همایش ملی ریاضی و آمار

<https://conf.gonbad.ac.ir/msc1404>

۲- چارچوب نظری و واکاوی شناختی موانع یادگیری هندسه

۲-۱. نظریه سطوح تفکر هندسی وان هیل

نظریه وان هیل یکی از تأثیرگذارترین نظریه‌ها در آموزش هندسه است که یادگیری مفاهیم هندسی را فرآیندی مرحله‌ای و وابسته به تجربه آموزشی می‌داند. بر اساس این نظریه، تفکر هندسی در پنج سطح متمایز رشد می‌یابد: اول، تجسم یا شناسایی بصری، دوم، تحلیل ویژگی‌ها، سوم، استنتاج غیررسمی و ارتباط میان قضایا، چهارم، استنتاج صوری و اثبات، و پنجم، دقت و نظام‌مندی صوری. نکته محوری در نظریه وان هیل آن است که انتقال از یک سطح به سطح بالاتر، نه به بلوغ سنی بلکه به کیفیت و نوع آموزش وابسته است. در نظام آموزشی دوره متوسطه دوم، غالباً آموزش هندسه مستقیماً در سطح استنتاج صوری (سطح چهارم) ارائه می‌شود، در حالی که بخش قابل توجهی از دانش‌آموزان هنوز در سطح تحلیل یا حتی تجسم قرار دارند. این ناهماهنگی شناختی موجب می‌شود که زبان برهان برای دانش‌آموزان نامفهوم جلوه کند و قضایا به صورت گزاره‌هایی حفظی و فاقد معنا درک شوند. افزون بر این، وان هیل تأکید می‌کند که هر سطح، زبان و منطق خاص خود را دارد. هنگامی که معلم با زبانی فراتر از سطح تفکر دانش‌آموز سخن می‌گوید، یادگیری واقعی رخ نمی‌دهد. از این منظر، یکی از ریشه‌های اصلی گسست میان شهود و برهان، بی‌توجهی به سلسله‌مراتب شناختی در طراحی برنامه درسی و روش تدریس است.

۲-۲. نظریه مفاهیم فیگورال فیش‌بین

فیش‌بین با معرفی نظریه «مفاهیم فیگورال»، ماهیت خاص مفاهیم هندسی را برجسته می‌سازد. از دیدگاه او، مفاهیم هندسی دارای دو بُعد هم‌زمانند: بُعد تصویری_شهودی (figure) و بُعد انتزاعی_تعریفی (concept). درک عمیق هندسه زمانی حاصل می‌شود که این دو بُعد در تعادل شناختی قرار گیرند. در عمل، بسیاری از دانش‌آموزان در حل مسائل هندسی، بیش از آنکه به تعریف‌ها و استدلال‌های منطقی تکیه کنند، به تصویر ذهنی یا نمودار ترسیمی اعتماد می‌کنند. این امر زمانی مسئله‌ساز می‌شود که تصویر بصری گمراه‌کننده باشد یا حالت خاصی را القا کند که با عمومیت قضیه سازگار نیست. فیش‌بین این وضعیت را «تعارض تصویر_مفهوم» می‌نامد؛ تعارضی که در آن، باورپذیری بصری جایگزین ضرورت منطقی می‌شود. از منظر آموزشی، حذف یا نادیده گرفتن تصاویر نیز راه‌حل مناسبی نیست؛ زیرا تصویر نقش مهمی در شکل‌گیری شهود و انگیزش یادگیری دارد. چالش اصلی، هدایت آگاهانه دانش‌آموز از شهود تصویری به کنترل مفهومی و استدلال صوری است. اینجاست که ابزارهای فناورانه و محیط‌های تعاملی می‌توانند به‌عنوان واسطه‌های شناختی ایفای نقش کنند.

۳- آسیب‌شناسی مفهوم برهان در آموزش هندسه

برهان، ستون فقرات هندسه مدرسه‌ای و نماد تفکر ریاضی پیشرفته است. با این حال، در عمل، بسیاری از دانش‌آموزان برهان را فعالیتی غیرطبیعی، دشوار و حتی بی‌فایده تلقی می‌کنند. بر اساس تمایز اسکمپ میان «فهم ابزاری» و «فهم رابطه‌ای»، می‌توان گفت که نظام آموزشی بیش از حد بر آموزش رویه‌ها و الگوهای آماده برهان تأکید دارد. در چنین شرایطی، دانش‌آموز می‌آموزد که چگونه یک برهان خاص را بازتولید کند، اما نمی‌فهمد چرا این برهان معتبر است یا چگونه می‌توان آن را تغییر داد. نتیجه آن است که برهان به مجموعه‌ای از جملات منفصل تقلیل می‌یابد و نقش هر گزاره در زنجیره استدلال روشن نیست. این وضعیت، زمینه را برای جایگزینی استدلال قیاسی با تأیید تجربی (مانند اندازه‌گیری یا مشاهده موردی) فراهم می‌کند و در نهایت، ضرورت منطقی برهان زیر سؤال می‌رود.

ششمین همایش ملی ریاضی و آمار

<https://conf.gonbad.ac.ir/msc1404>

۴- رویکردهای نوین و تحلیل تطبیقی

بررسی تطبیقی نظام‌های آموزشی موفق نشان می‌دهد که آموزش هندسه در این کشورها از چارچوب صلب و صرفاً اقلیدسی فاصله گرفته و به سوی رویکردهای منعطف‌تر حرکت کرده است. در ژاپن، الگوی «کشف هدایت‌شده» با تأکید بر گفت‌وگوهای کلاسی و طرح مسائل چالش‌برانگیز، دانش‌آموزان را در فرآیند تولید قضیه و استدلال مشارکت می‌دهد. در فنلاند، رویکرد پدیدارشناسانه با پیوند دادن هندسه به معماری، طراحی و فضاهای واقعی، مفاهیم انتزاعی را عینی می‌سازد. در ایالات متحده، هندسه تحولی با تمرکز بر تبدیلاتی چون انتقال، دوران و تقارن، نگاه ساختاری‌تری به مفاهیم هندسی ارائه می‌دهد. همچنین در کشورهایی مانند کره جنوبی و استونی، هندسه الگوریتمی و استفاده از برنامه‌نویسی (نظیر Python Turtle یا Scratch) به دانش‌آموزان کمک می‌کند تا روابط هندسی را به صورت فرایندهای منطقی و قابل اجرا درک کنند. این رویکرد، پیوندی عمیق میان منطق ریاضی، تفکر محاسباتی و خلاقیت بصری برقرار می‌سازد.

۵- نقش هوش مصنوعی و فناوری‌های نوین در آموزش هندسه

۵-۱. کاربردهای هوش مصنوعی در آموزش هندسه هوش مصنوعی (AI)

ظرفیت‌های نوینی برای شخصی‌سازی یادگیری هندسه فراهم کرده است. سامانه‌های آموزشی هوشمند می‌توانند با تحلیل پاسخ‌ها و الگوهای خطای دانش‌آموزان، سطح تفکر هندسی آن‌ها را (بر اساس سطوح وان‌هیل) تشخیص داده و مسیر یادگیری متناسب پیشنهاد دهند. افزون بر این، الگوریتم‌های هوش مصنوعی قادرند بازخورد آنی و تطبیقی ارائه کنند؛ به گونه‌ای که دانش‌آموز نه تنها از نادرستی پاسخ، بلکه از منطق خطای خود آگاه شود. کاربرد دیگر AI در تولید مسائل پویا و چندسطحی است؛ مسائلی که به‌طور خودکار با سطح توانایی یادگیرنده سازگار می‌شوند و او را به تدریج از شهود بصری به استدلال صوری هدایت می‌کنند. همچنین ابزارهای مبتنی بر پردازش زبان طبیعی می‌توانند در تحلیل برهان‌های نوشتاری دانش‌آموزان و شناسایی گسست‌های منطقی مورد استفاده قرار گیرند.

۵-۲. هندسه پویا و نقش نرم‌افزارهای تعاملی

نرم‌افزارهای هندسه پویا مانند GeoGebra، Cabri و Desmos Geometry، امکان مشاهده هم‌زمان «تغییر» و «ناوردایی» را فراهم می‌کنند. این ویژگی به دانش‌آموز کمک می‌کند تا از مشاهده تجربی روابط، به صورت‌بندی حدس و در نهایت به اثبات صوری برسد. پژوهش‌ها نشان می‌دهد که این محیط‌ها می‌توانند تعارض تصویر-مفهوم را کاهش داده و نقش تصویر را از عامل گمراه‌کننده به ابزار اکتشافی ارتقا دهند.

۵-۳. فناوری واقعیت افزوده (AR) در آموزش هندسه

واقعیت افزوده با افزودن لایه‌های دیجیتال به محیط واقعی، امکان تجسم سه‌بعدی مفاهیم هندسی را فراهم می‌سازد. در آموزش هندسه فضایی، AR می‌تواند احجام، مقاطع و تبدیلات فضایی را به صورت تعاملی نمایش دهد و محدودیت‌های ترسیم دوبعدی را برطرف کند. این فناوری به‌ویژه برای دانش‌آموزانی که در تجسم فضایی ضعف دارند، ابزاری توانمند برای پیوند دادن تجربه حسی با استدلال هندسی محسوب می‌شود.

۶- چالش‌های گذار از آموزش سنتی به آموزش مدرن هندسه

گذار از آموزش سنتی هندسه به رویکردهای مدرن، فناورانه و یادگیرنده‌محور، فرایندی پیچیده و چندبعدی است که با چالش‌های جدی برای معلمان و دانش‌آموزان همراه است. نادیده گرفتن این چالش‌ها می‌تواند موجب شکست یا سطحی‌سازی نوآوری‌های آموزشی شود.

ششمین همایش ملی ریاضی و آمار

<https://conf.gonbad.ac.ir/msc1404>

۱-۶. چالش‌های معلمان

از شهود بصری تا برهان صوری: آسیب‌شناسی شناختی آموزش هندسه در دوره متوسطه دوم با تأکید بر رویکردهای نوین تطبیقی.

یکی از مهم‌ترین موانع، «مقاومت حرفه‌ای» معلمان در برابر تغییر است. بسیاری از معلمان، خود محصول نظام آموزش سنتی مبتنی بر انتقال مستقیم دانش و برهان‌های از پیش‌ساخته‌اند و در نتیجه، درک عمیقی از رویکردهای اکتشافی، هندسه پویا یا آموزش مبتنی بر فناوری ندارند. این امر گاه به اضطراب فناورانه (Technological Anxiety) و نگرانی از دست دادن کنترل کلاس منجر می‌شود. افزون بر این، کمبود آموزش‌های ضمن خدمت هدفمند، فشار برنامه درسی متراکم و نظام ارزشیابی مبتنی بر آزمون‌های استاندارد، فرصت تجربه‌ورزی و نوآوری را از معلمان سلب می‌کند. در چنین شرایطی، فناوری‌های نوین به جای آنکه ابزار تحول باشند، به افزونه‌هایی سطحی و نمایشی تقلیل می‌یابند.

۲-۶. چالش‌های دانش آموزان

برای دانش‌آموزان نیز گذار به آموزش مدرن همواره آسان نیست. دانش‌آموزانی که سال‌ها به یادگیری منفعل و دریافت پاسخ‌های آماده عادت کرده‌اند، در مواجهه با روش‌های اکتشافی، پرسش‌محور و مبتنی بر فناوری، دچار سردرگمی شناختی می‌شوند. از آن‌ها انتظار می‌رود که فرضیه‌سازی کنند، استدلال خود را توضیح دهند و خطاهایشان را تحلیل کنند؛ مهارت‌هایی که پیش‌تر به‌طور نظام‌مند پرورش نیافته‌اند. همچنین شکاف دیجیتال، تفاوت در دسترسی به ابزارهای فناورانه و مهارت‌های سواد دیجیتال، می‌تواند نابرابری آموزشی را تشدید کند. در صورت نبود راهبردی آموزشی مناسب، استفاده از نرم‌افزارهای هندسه پویا یا محیط‌های هوشمند ممکن است به یادگیری سطحی یا اتکای افراطی به مشاهده تجربی بینجامد.

۳-۶. چالش‌های نهادی و فرهنگی

در سطح کلان، فرهنگ آموزشی مبتنی بر نمره، کنکور و پاسخ درست واحد، با فلسفه آموزش مدرن هندسه که بر فرایند تفکر، خطا و بازاندیشی تأکید دارد، در تعارض است. بدون اصلاح هم‌زمان برنامه درسی، ارزشیابی و نظام تربیت معلم، تحول روش تدریس به‌تنهایی نمی‌تواند شکاف میان شهود و برهان را ترمیم کند.

۷- نتیجه‌گیری و پیشنهادها

یافته‌های پژوهش نشان می‌دهد که بحران آموزش هندسه در دوره متوسطه دوم، ریشه در ناهماهنگی شناختی، غلبه فهم ابزاری و بی‌توجهی به نقش شهود دارد. برای اصلاح این وضعیت، پیشنهاد می‌شود:

- (۱) محتوای آموزشی بر اساس سلسله‌مراتب سطوح وان‌هیل بازطراحی شود.
- (۲) رویکردهای هندسه تحولی و الگوریتم‌محور در برنامه درسی ادغام گردد.
- (۳) از محیط‌های هندسه پویا، هوش مصنوعی و واقعیت افزوده به‌صورت هدفمند و نظام‌مند استفاده شود.
- (۴) نظام ارزشیابی از تأکید بر بازتولید برهان به سنجش فرایند تفکر استدلالی تغییر یابد.

۸- مراجع

- [۱] اسکمپ، ر. (۱۳۸۴). *فهم رابطه‌ای و فهم ابزاری* (ترجمه زهرا گویا). رشد آموزش ریاضی.
- [۲] یافتیان، ن. (۱۴۰۰). بررسی بدفهمی‌های هندسی دانش‌آموزان بر اساس سطوح تفکر وان‌هیل. نشریه علمی پژوهشی فناوری آموزش.
- [3] Fischbein, E. (1993). *The theory of figural concepts. Educational Studies in Mathematics, 24(2), 139-162.*
- [4] Greenberg, M. J. (2010). *Euclidean and Non-Euclidean Geometries: Development and History. W. H. Freeman.*



ششمین همایش ملی ریاضی و آمار

<https://conf.gonbad.ac.ir/msc1404>

- [5] Mainali, B. (2021). *Representation in geometric learning: A review of dynamic geometry software. International Journal of Education in Mathematics, Science and Technology (IJEMST)*, 9(1), 145-163.
- [6] Van Hiele, P. M. (1986). *Structure and Insight: A Theory of Mathematics Education. Academic Press.*

ششمین همایش ملی ریاضی و آمار

<https://conf.gonbad.ac.ir/msc1404>

F-205، صص ۱۳۳-۱۳۶.

مدل‌سازی یک شبکه الکتریکی در چارچوب سیستم پورت-همیلتونی و مقایسه آن با مدل متناظر در چارچوب فضای حالت

مه‌ر آسا آیت‌اللهی

استادیار، گروه ریاضی، دانشگاه پیام نور، صندوق پستی ۴۶۹۷-۱۹۳۹۵، تهران، ایران: m_ayatollahi@pnu.ac.ir

چکیده

مدل فضای حالت به عنوان یک چارچوب کلاسیک برای تحلیل و طراحی سیستم‌های دینامیکی از دیرباز مورد توجه پژوهشگران و مهندسان بوده است. با این حال، برای سیستم‌های فیزیکی پیچیده و چند دامنه‌ای که ساختار فیزیکی و جریان انرژی را حفظ می‌کنند، نمایش‌های جایگزین کارآیی بیشتری دارند و توجه بیشتری را به خود جلب کرده‌اند. یکی از این چارچوب‌های جایگزین، ساختار سیستم پورت-همیلتونی است. ساختار پورت-همیلتونی، دینامیک را بر اساس ذخیره‌سازی، اتلاف و اتصال انرژی مدل‌سازی می‌کند. در این مقاله، با ارائه مدل‌های پورت-همیلتونی و فضای حالت برای یک شبکه الکتریکی به مقایسه آن‌ها می‌پردازیم.

کلمات کلیدی: شبکه الکتریکی، مدل فضای حالت، ساختار پورت-همیلتونی.

۱- مقدمه

نمایش فضای حالت از اواسط قرن بیستم، سنگ بنای نظریه کنترل مدرن بوده است. عمومیت و سهولت کاربرد فضای حالت، امکان تجزیه و تحلیل سیستماتیک و تحلیل کنترل‌کننده را برای طیف وسیعی از سیستم‌های خطی و غیرخطی امکان‌پذیر می‌سازد [۱]. با این حال، مدل‌های فضای حالت اغلب ساختار فیزیکی سیستم‌ها را نادیده می‌گیرند و در عوض بر راحتی ریاضی تمرکز می‌کنند.

در مقابل، سیستم‌های پورت-همیلتونی یک الگوی مدل‌سازی مبتنی بر انرژی ارائه می‌دهند که ریشه در اصول فیزیکی مانند پایستگی انرژی و تبادل توان از طریق پورت‌ها دارد. این چارچوب که در ابتدا برای یکپارچه‌سازی مدل‌سازی در سیستم‌های مکانیکی، الکتریکی و ترمودینامیکی توسعه داده شده بود، به ابزاری قدرتمند برای طراحی کنترل و اتصال سیستم‌ها تبدیل شده است به طوریکه روش‌های مبتنی بر انرژی در چارچوب پورت-همیلتونی، تکنیک‌های طراحی کنترل غیرخطی سیستماتیک را با خواص پایداری تضمین‌شده ارائه می‌دهند [۶].

در این مقاله، به طور مختصر به مقایسه این دو چارچوب برای یک شبکه الکتریکی می‌پردازیم.

۲- مدل فضای حالت

در حالت کلی، یک سیستم کنترل غیرخطی در مدل فضای حالت دارای نمایشی به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, u) \\ y &= g(x, u) \end{aligned} \quad (1)$$

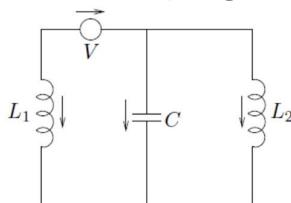
جایی که $x \in \mathbb{R}^n$ بردار حالت، $u \in \mathbb{R}^m$ بردار ورودی و $y \in \mathbb{R}^p$ بردار خروجی نامیده می‌شوند. این فرم نمایش، برای یک سیستم کنترل خطی نوردای زمانی (LTI) به صورت زیر است:

ششمین همایش ملی ریاضی و آمار

<https://conf.gonbad.ac.ir/msc1404>

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du \end{aligned} \quad (2)$$

این فرمول بندی برای طیف وسیعی از سیستم‌ها صرف نظر از منشأ فیزیکی آنها مناسب و قابل استفاده است [۱]. به عنوان نمونه، یک شبکه الکتریکی مطابق شکل زیر را در نظر می‌گیریم:



برای سیستم فوق با در نظر گرفتن V_C به عنوان ولتاژ خازن و I_{L_1} و I_{L_2} به عنوان جریان مقاومت‌ها، قوانین فیزیک منجر به مجموعه روابط زیر می‌شود:

$$\begin{aligned} L_1 \frac{dI_{L_1}(t)}{dt} &= V_{L_1}(t) = V_C(t) + V(t) \\ L_2 \frac{dI_{L_2}(t)}{dt} &= V_{L_2}(t) = V_C(t) \\ C \frac{dV_C(t)}{dt} &= I_C(t) = -I_{L_1}(t) - I_{L_2}(t) \end{aligned} \quad (3)$$

اکنون $V(t)$ را به عنوان ورودی $(u(t) = V(t))$ در نظر گرفته و با فرض اینکه فقط $I_{L_1}(t)$ قابل اندازه‌گیری باشد، خروجی را برابر با $I_{L_1}(t)$ انتخاب می‌کنیم $(y(t) = I_{L_1}(t))$. در این صورت معادله دیفرانسیل توصیف کننده سیستم مورد نظر عبارتست از:

$$L_1 C \ddot{y}(t) + \left(1 + \frac{L_1}{L_2}\right) \dot{y}(t) = \frac{1}{L_2} u(t) + C \ddot{u}(t) \quad (4)$$

برای تبدیل معادله دیفرانسیل (۴) به مدل فضای حالت با توجه به مجموعه روابط (۳)، بردار حالت $x(t)$ را به صورت زیر انتخاب می‌کنیم:

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{L_1}(t) \\ I_{L_2}(t) \\ V_C(t) \end{bmatrix} \quad (5)$$

بدین ترتیب با مشتق‌گیری، مدل فضای حالت متناظر با شبکه الکتریکی مورد نظر را به صورت زیر خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} \frac{1}{L_1} x_3(t) + \frac{1}{L_1} V(t) \\ \frac{1}{L_2} x_3(t) \\ -\frac{1}{C} x_1(t) - \frac{1}{C} x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{L_1} \\ 0 & 0 & \frac{1}{L_2} \\ -\frac{1}{C} & -\frac{1}{C} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L_1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} V(t) \\ y(t) &= [1 \quad 0 \quad 0] \begin{bmatrix} I_{L_1}(t) \\ I_{L_2}(t) \\ V_C(t) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (6)$$

از آنجا که مدل فضای حالت در فضای اقلیدسی تعریف شده است، طبیعی است که برای این مدل از نرم اقلیدسی استفاده شود؛ نرم اقلیدسی متناظر با مدل (۶) برابر است با:

ششمین همایش ملی ریاضی و آمار

<https://conf.gonbad.ac.ir/msc1404>

$$\left\| \begin{matrix} I_{L_1} \\ I_{L_2} \\ V_C \end{matrix} \right\| = \sqrt{I_{L_1}^2 + I_{L_2}^2 + V_C^2} \quad (7)$$

۳- چارچوب سیستم پورت-همیلتونی

سیستم کنترل پورت-همیلتونی (Port-Hamiltonian Control System) یا به اختصار PHS، یک چارچوب قدرتمند برای مدل سازی و کنترل سیستم های فیزیکی است که مستقیماً بر پایه انرژی بنا شده است. در این نوع سیستم ها، دینامیک سیستم با انرژی ذخیره شده (همیلتونی) توصیف می شود و ساختار فیزیکی سیستم (شامل اتصالات و اتلاف) صریحاً در مدل دیده می شود؛ تبادل انرژی سیستم با محیط نیز از طریق پورت ها انجام می گیرد [۲].

فرم استاندارد یک سیستم پورت-همیلتونی به شکل زیر است:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (J(x) - R(x)) \nabla H(x) + G(x) u \\ y &= G^T(x) \nabla H(x) \end{aligned} \quad (8)$$

که در آن $x \in \mathbb{R}^n$ بردار حالت، $H(x)$ تابع همیلتونی (معمولاً کل انرژی سیستم) و u, y خروجی و ورودی هستند که نشان دهنده تبادل توان می باشند. $J(x)$ یک ماتریس پاد متقارن به نام ماتریس بین اتصالی (Interconnection) است که انرژی را حفظ می کند. $R(x)$ نیز یک ماتریس نیمه معین مثبت، بیانگر اصطکاک، مقاومت و تلفات می باشد و ماتریس اتلاف (Dissipation) نامیده می شود. ماتریس $G(x)$ نیز که نشان دهنده نحوه تزریق انرژی به سیستم است، ماتریس پورت ها نامیده می شود.

برای شبکه الکتریکی که با معادله (۳) ارائه شده و با در نظر گرفتن حالت سیستم به صورت (۵) (مشابه مدل فضای حالت)، ماتریس های متناظر برای توصیف سیستم پورت-همیلتونی عبارت خواهند بود از:

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{L_1 C} \\ 0 & 0 & \frac{1}{L_2 C} \\ -\frac{1}{L_1 C} & -\frac{1}{L_2 C} & 0 \end{bmatrix}, \quad H = \begin{bmatrix} L_1 & 0 & 0 \\ 0 & L_2 & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix} \quad (9)$$

که در این صورت نرم با توجه به انرژی برابر است با:

$$E = \frac{1}{2} (L_1 I_{L_1}^2 + L_2 I_{L_2}^2 + C V_C^2) \quad (10)$$

هرچند (۱۰) معادل نرم اقلیدسی است اما استفاده از نرم انرژی مزایایی دارد که با توجه به مشتق رابطه (۱۰) روشن می شود:

$$\frac{dE}{dt}(t) = V(t) I_{L_1}(t) \quad (11)$$

طبق رابطه فوق، مشتق انرژی برابر است با حاصل ضرب ورودی در خروجی؛ بدین ترتیب اگر ولتاژی به سیستم وارد نشود انرژی سیستم ثابت خواهد ماند. این ویژگی در مورد همه سیستم های پورت-همیلتونی برقرار است.

در حالت کلی با توجه به رابطه (۸)، معادله تعادل انرژی برای سیستم های پورت-همیلتونی به صورت زیر تعریف می شود:

$$\dot{H} = -(\nabla H)^T R(\nabla H) + y^T u \quad (12)$$

این معادله بیانگر خاصیت غیر فعال بودن (passivity property) است؛ یعنی، در یک سیستم پورت-همیلتونی در غیاب هرگونه ورودی ($u = 0$)، انرژی ذخیره شده افزایش ندارد (کاهش می یابد یا ثابت می ماند)، که نشان دهنده پایداری است [۴]. بنابراین، استفاده از نرم انرژی در سیستم های پورت-همیلتونی علاوه بر اینکه ارتباط با ساختار فیزیکی سیستم را فراهم می کند،



ششمین همایش ملی ریاضی و آمار

<https://conf.gonbad.ac.ir/msc1404>

اثبات خواص سیستم را نیز ساده تر می کند. علاوه بر این، اتصال مدل های فضای حالت اغلب نیاز به استخراج مجدد ماتریس های سیستم و ارزیابی مجدد پایداری دارد اما در ساختار پورت-همیلتونی امکان اتصال از طریق پورت ها فراهم می شود و پایداری نیز حفظ می شود که برای سیستم های بزرگ و شبکه های مزیت قابل توجهی محسوب می شود [۵].

۴- نتیجه گیری

چارچوب های نمایش فضای حالت و پورت-همیلتونی را می توان به عنوان دو دیدگاه مکمل برای سیستم های دینامیکی در نظر گرفت. اگرچه هر دو مورد، سیستم فیزیکی یکسانی را توصیف می کنند اما دیدگاه های متفاوتی ارائه می دهند. مدل سازی فضای حالت، با تأکید بر ساختار ریاضی و تحلیل پایداری مبتنی بر مقادیر ویژه، کلیتی جامع از ابزارهای کنترلی را ارائه می دهد در حالی که ساختار پورت-همیلتونی بر جریان انرژی فیزیکی و خواص غیرفعال بودن تأکید دارد و یک رویکرد فیزیکی معنادار و مبتنی بر انرژی با خواص پایداری ذاتی ارائه می دهد. برای سیستم های پیچیده و غیرخطی فیزیکی که جریان انرژی و اتصال متقابل در آنها نقش اساسی دارد، چارچوب پورت-همیلتونی مزایای مفهومی و عملی قابل توجهی ارائه می دهد. به عنوان پیشنهادی برای پژوهش های آینده، می توان کاربرد تکنیک های کنترل بهینه در ساختارهای پورت-همیلتونی را در نظر گرفت.

۵- مراجع

- [1] Astrom K. J. and Murray R. M.; *Feedback Systems: An Introduction for Scientists and Engineers*, Princeton University Press, 2008.
- [2] Ortega R., Schaft A. J. V. D., Mareels I. & Maschke B.; *Putting Energy Back in Control*, IEEE Control Systems Magazine, 21(2), 18-33, 2001.
- [3] Schaft A. J.; *L2-Gain and Passivity Techniques in Nonlinear Control*, Springer, 2017.
- [4] Maschke B. and Schaft A. J.; *Port-controlled Hamiltonian systems: modeling origins and system-theoretic properties*, IFAC Proceedings Volumes, 1992.
- [5] Schaft A. J. and Jeltsema D.; *Port-Hamiltonian systems theory: An introductory overview*, Foundations and Trends in Systems and Control, 1 (2-3), 173-378, 2014.



جایگاه ریاضیات و عدد در اندیشه‌ی فیلسوفان مسلمان

فردین جمشیدی مهر، علی نوری^۲

^۱استادیار گروه الهیات، دانشگاه گنبد کاووس؛ fjamshidi@gonbad.ac.ir

^۲استادیار گروه معارف، دانشگاه گنبد کاووس؛ nouri@gonbad.ac.ir

چکیده

این مقاله، که در جمع‌آوری داده‌ها از روش کتابخانه‌ای و اسنادی و در پردازش آنها از شیوه‌ی توصیفی - تحلیلی بهره برده است، به بررسی رابطه‌ی ریاضیات و فلسفه و جایگاه علم ریاضی در نزد فیلسوفان مسلمان می‌پردازد. فلاسفه اسلامی ریاضیات را که خود شامل حساب، هندسه، نجوم و موسیقی می‌شود، از دو جهت ارزشگذاری می‌کردند. اول ارزشگذاری نسبی و مقایسه‌ای و دوم ارزشگذاری ذاتی. یافته‌های پژوهش نشان می‌دهد که آنها در ارزشگذاری نسبی، ریاضیات را برتر و شریفتر از علوم تجربی (طبیعیات) و پایین‌تر از الهیات و فلسفه قرار می‌دادند. ملاک ارزشگذاری آنها در این شیوه، ارتباط با ماده بوده است. در ارزشگذاری ذاتی، آنها ریاضیات را علمی و همی برمی‌شمردند که منظور از وهم توانایی ذهن برای تصور اعداد بدون معدود بوده است.

کلمات کلیدی: فلسفه؛ ریاضیات؛ واهمه؛ ماده؛ ارزش

۱- مقدمه

بررسی تاریخ علم نشان می‌دهد که میان فلسفه و ریاضیات رابطه‌ی عمیقی وجود داشته است. از طرفی در طول تاریخ فلسفه، دانشمندان، دو علم فلسفه و ریاضیات را علم یقینی برمی‌شمردند؛ به طوری که نتیجه‌ی هر مسئله در آنها دقیق و غیرنسبی است و از طرف دیگر از یونان باستان در تقسیم‌بندی علوم، ریاضیات را نوعی از فلسفه برمی‌شمردند که به جای پرداختن به نظام هستی به اعداد و روابط میان آنها می‌پردازد. فیثاغورس را که بزرگترین فیلسوف ریاضیدان تاریخ فلسفه برمی‌شمردند، حلقه‌ی مشترک میان این دو دانش می‌دانند که البته حلقه‌های مشترک دیگری هم در تاریخ علم می‌توان شناسایی کرد، دانشمندانی مانند رنه دکارت که شیوه‌ی اختصاصی خود در حل مسائل هندسی را در فلسفه هم اجرایی نمود. ارتباط میان فلسفه و ریاضیات تا جایی است که برخی بر این باور بودند که اگر کسی ریاضیات نداند، فیلسوف نخواهد بود [۳، ص ۱۲۱]. برخی از فیلسوفان مسلمان وجه تسمیه‌ی ریاضیات را چنین می‌دانند که ریاضیات را به این خاطر به ریاضی می‌خوانند که نفوس برای انتزاع معانی مجرد از امور محسوس و تصرف ذهنی در آنها دچار ریاضت و سختی می‌شوند [۲، ص ۸] و اتفاقاً همین امر در فلسفه هم محقق است که فلسفه از امور محسوس به امور مجرد و غیرمادی می‌رسد و همراه با تأملات و عملیات ذهنی و سختی و ریاضت است. بنابراین، وجه اشتراک فلسفه و ریاضیات معلوم می‌شود که اتفاقاً همین امر سبب شده است که برخی از فیلسوفان معاصر مانند علامه طباطبایی ریاضیات را برای فهم فلسفه مهم و اثرگذار بدانند.

تقسیم فلسفه به نظری و عملی از دوران آغازین فلسفه‌ی مدون یعنی از زمان فیلسوفان یونان باستان برای امروزیان به میراث مانده است. بر اساس این تقسیم در کنار فلسفه‌ی عملی که سه زیرشاخه‌ی اخلاق، سیاست و تدبیر منزل را در بر می‌گیرد، فلسفه‌ی نظری به سه شاخه‌ی اصلی یعنی فلسفه‌ی اولی (الهیات)، فلسفه‌ی وسطی (ریاضیات) و فلسفه‌ی سفلی (طبیعیات) تقسیم می‌شود [۴، صص ۱۹۶ و ۱۹۷].

ششمین همایش ملی ریاضی و آمار

<https://conf.gonbad.ac.ir/msc1404>

از دیدگاه گذشتگان ریاضیات خود شامل چهار علم بود؛ حساب، هندسه، نجوم و موسیقی [۵، ج ۱، ص ۲۴]. وجه اشتراک این چهار دانش در این است که همه‌ی آنها مرتبط و بلکه مبتنی بر عدد هستند.

گذشتگان الهیات را فلسفه‌ی برتر می‌نامیدند همان‌طور که از نگاه آنان ریاضیات و طبیعیات به ترتیب، فلسفه‌های متوسط و پست‌تر به حساب می‌آمدند [۱۱، صص ۷-۹]. سرّ این نگاه به ملاک آنان برای سنجش جایگاه و مرتبت موجودات در نظام هستی بر می‌گردد. از منظر آنان، ماده عامل پستی و خساست موجودات است [۱۲، ص ۷۰] و مانع بسیاری از کمالات از جمله تعقل و اندیشه است [۹، ص ۴۱]. منظور از ماده، همان عاملی است که سبب قبول دگرگونی و تغییر می‌شود [۱، ص ۲۴۴]. دگرگونی، تغییر و حرکت نشانه‌ی ضعف و پستی است و موجود متغیر نسبت به موجود ثابت در رتبه‌ی نازلتری قرار دارد. موجودات عالم طبیعت به خاطر اینکه دارای یک جزء جوهری به اسم ماده هستند، می‌توانند تغییر کنند؛ یعنی صورت فعلی خود را از دست داده و صورت جدیدی را بپذیرند در حالی که موجودات فرامادی چون تمام کمالاتی که برای آنها مقدر بوده را یکجا دریافت کرده‌اند و امکان پذیرش صورت جدید و کمال جدیدی برای آنان فرض ندارد، در حالت ثبات هستند و هرگز دچار تغییر و دگرگونی نمی‌شوند. بنابراین، چون ماده عامل پستی است، هر موجودی که از ماده دورتر و به مبدأ هستی نزدیکتر باشد، از رتبه و شرافت بیشتری برخوردار است. بر این اساس، آنها عوالم وجودی را در سه مرتبه طبقه‌بندی می‌کردند؛ عالم ماده (عالم طبیعت) که عالم تغییرات و دگرگونی‌هاست، عالم مثال یا ملکوت و عالم عقول یا مجردات تام [۱۳، ص ۱۳۹]. از دیدگاه آنان هر یک از این سه عوالم، از ویژگی‌های خاص خود برخوردار است. عالم طبیعت نه تنها ماده دارد یعنی قابلیت تغییرپذیری و دگرگونی در آن است، از آثار ماده هم مانند شکل، رنگ، اندازه، وضع و ... برخوردار است. این در حالی است که عالم مثال، فاقد ماده است، اما از آثار ماده برخوردار می‌باشد. بنابراین، عالم مثال تغییرپذیر نیست، اما واجد شکل، رنگ و اندازه و سایر آثار و ویژگی‌های مادی می‌باشد. عالم عقول که عالم مجردات تام است، نه تنها ماده ندارد، بلکه از آثار ماده هم مبرا است. عالم عقول که نزدیکترین عالم به مقام ربوبی است، کاملترین عوالم به شمار می‌آید [۷، صص ۹۵۴ و ۹۵۵]. بر این اساس، از دیدگاه فیلسوفان مسلمان، آنچه که عامل محدودیت و ضیق وجودی است، ماده است و هر عالمی که بیشتر از این ماده فاصله داشته باشد و کمتر به آن آغستگی داشته باشد، کاملتر و شریفتر خواهد بود.

فیلسوفان مسلمان بر همین اساس برای انسان - به عنوان کاملترین موجود عالم ماده - ادراکات سه‌گانه قائلند که هر ادراکی می‌تواند عالمی از عوالم وجودی را درک کند، مانند اینکه هر کدام پنجره‌ای رو به عالمی باشند. قوه‌ی حس که شامل حواس پنج‌گانه می‌باشد، می‌تواند عالم ماده را ادراک نماید. قوه‌ی خیال عامل ارتباط و ادراک انسان نسبت به عالم مثال است و انسان به واسطه‌ی این قوه می‌تواند موجوداتی را درک کند که ماده ندارند اما از آثار ماده برخوردارند. قوه‌ی عقل - که قوه‌ی اختصاصی به انسان است و هیچ موجودی در عالم طبیعت، غیر از انسان، از این قوه برخوردار نیست - می‌تواند حقایق و موجودات عالم عقول را بفهمد و درک کند. بنابراین، همان درجه‌بندی و ارزش‌گذاری که فیلسوف مسلمان نسبت به عوالم وجودی اعمال می‌کند، نسبت به قوای ادراکی انسان هم اعمال می‌کند.

۲. جایگاه علم ریاضی

فیلسوفان مسلمان علم ریاضیات را از دو جهت ارزش‌گذاری کرده‌اند؛ جهت اول در مقایسه با سایر علوم که اصطلاحاً ارزش نسبی خوانده می‌شود و جهت دوم خود علم ریاضی بدون مقایسه با علوم دیگر که ارزش ذاتی گفته می‌شود.

۲-۱. ارزش نسبی علم ریاضی

فیلسوفان بعد از ارزش‌گذاری عوالم وجودی و نیز قوای ادراکی انسان، به رتبه‌بندی علوم همت گماشتند. از آنجا که ملاک خست و شرافت از دیدگاه فیلسوفان مسلمان به وجود ماده و دوری از آن برمی‌گشت، علوم را هم بر همین اساس، رتبه‌بندی کردند. به باور آنان علوم طبیعی (تجربی) را که بیشترین ارتباط را با ماده دارد، پست‌ترین و نازل‌ترین علوم معرفی می‌کردند زیرا

ششمین همایش ملی ریاضی و آمار

<https://conf.gonbad.ac.ir/msc1404>

هر موجود طبیعی مانند درخت، سنگ و ... هم در عالم خارج از ذهن یعنی عالم واقعیت و هم در مقام ذهن ملازم با ماده یا تصویر ماده است و بر این اساس نه در ذهن و نه در خارج از ماده خلاصی ندارد.

ریاضیات که با عدد سر و کار دارد، در رتبه‌ی بالاتری از طبیعیات قرار می‌گیرد؛ یعنی شرافت و منزلت علوم ریاضی از علوم تجربی بیشتر است، به این دلیل که عدد اگر چه در خارج از ذهن همواره با ماده ملازم است، یعنی هیچ گاه عدد به تنهایی موجود نمی‌شود؛ بلکه همیشه با یک معدود مادی مانند سنگ، انسان، درخت و غیره همراه است، اما در مقام ذهن و تصور می‌توانیم مثلاً عدد ۲ را تصور کنیم، بدون اینکه سیب، کتاب، انسان و یا هر معدود دیگری را تصور نماییم. بر همین اساس معتقد بودند که عدد یعنی موضوع ریاضیات، در خارج از ذهن مادی اما در ذهن مجرد است. پس ریاضیات چون وابستگی کمتری به ماده دارد، در مقام و مرتبت بالاتری از علوم طبیعی قرار می‌گیرد.

از ریاضیات بالاتر و برتر، الهیات است چرا که موضوع الهیات نه در خارج و نه در ذهن ملازم با ماده نیست یعنی ضرورتی ندارد که با ماده باشد، اگر چه در مقام تحقق ممکن است موضوع الهیات به همراه ماده بیاید، ولی این همراهی از باب تلازم ذات این موضوع با ماده نیست. بنابراین، الهیات را شریفترین و کاملترین علم معرفی می‌کردند.

۲-۲. ارزش ذاتی علم ریاضی

فیلسوفان مسلمان برای انسان قوای ادراکی متعددی برمی‌شمردند که اجمالاً به برخی از آنها مانند قوه‌ی حس، خیال و عقل اشاره شد. اما برای تعیین ارزش ذاتی علم ریاضی ضروری است که به صورت تفصیلی به بررسی قوای ادراکی پرداخته شود. فلاسفه برای انسان دوگونه حس قائلند؛ حواس ظاهری و حواس باطنی.

منظور از حواس ظاهری همین حواس پنج‌گانه‌ی شناخته شده است. ویژگی این حواس این است که هر یک از آنها صرفاً مُدرکات خاص خود را درک می‌کنند، مثلاً قوه‌ی باصره (بینایی) تنها مبصرات (دیدنی‌ها) را درک می‌کند و از درک مسموعات (شنیدنی‌ها) عاجز است؛ همان‌طور که قوه‌ی سامعه (شنوایی) تنها مسموعات (شنیدنی‌ها) را درک می‌کند و از ادراک مبصرات و مسمومات ناتوان است.

منظور از حواس باطنی، حواسی است که مستقیم با امور مادی خارجی ارتباط ندارند؛ بلکه به وساطت حواس ظاهری با آنها مرتبط می‌شوند. حواس باطنی نیز پنج قسمند که در ادامه به تبیین آنها پرداخته می‌شود.

قبل از تبیین حواس باطنی بیان یک مقدمه ضروری است و آن تفاوت میان صورت و معناست. صورت عبارت است از اموری ذهنی که اگر در خارج از ذهن انسان، موجود شود، از ویژگی‌های مادی مانند شکل، رنگ، اندازه و ... برخوردار خواهد بود. بنابراین، انسان، کوه، سیمرغ و دیو که در ذهن انسان می‌توانند موجود شوند، از سنخ صورتند. چرا که انسان یا سیمرغ اگر در خارج از ذهن تحقق پیدا کنند، قطعاً شکل و رنگ و اندازه‌ای خواهند داشت و انسان فاقد شکل و رنگ یا سیمرغ بدون اندازه و شکل نمی‌تواند وجود خارجی پیدا کند. اما معنا عبارت است از یک امر ذهنی که اگر چه خود آن مادی نیست اما مربوط به امور مادی است. معانی اگر در خارج از ذهن انسان تحقق پیدا کنند، ویژگی‌های ماده مانند شکل و رنگ و اندازه و وضع و ... نخواهند داشت. مثلاً محبت، عشق، نفرت، ترس و مانند اینها همگی از سنخ معنا هستند. اما حواس باطنی، بعد از تبیین این مقدمه، به شرح ذیل هستند:

حس مشترک که همه‌ی ادراکات حواس پنج‌گانه را که از سنخ صورت هستند، به صورت یکجا درک می‌کند [۸، ص ۱۳۸]، بر خلاف حواس ظاهری که هر یک ادراکی مستقل از دیگری داشت.

خیال صورتهای ادراکی حس مشترک را در خود نگه می‌دارد و در زمان و موقعیت مناسب آنها را بازآفرینی می‌کند. بنابراین، خیال برای حس مشترک به منزله‌ی حافظه‌ای است که صورتهای آن در خود حفظ می‌کند.

واهمه معانی جزئی را مانند محبت این مادر به این فرزند خاص، یا ترس این شخص از آن مسئله را درک می‌کند. به عبارت دیگر، واهمه، امور غیرمحسوس را از محسوسات انتزاع کرده و درک می‌کند [۱۰، صص ۷۸ و ۷۹].

ششمین همایش ملی ریاضی و آمار

<https://conf.gonbad.ac.ir/msc1404>

حافظه معانی جزیی را که توسط واژه درک شده بود، در خود نگه می‌دارد و همان نسبتی که خیال با حس مشترک داشت، حافظه با واژه دارد.

متخیله قوه‌ای است که می‌تواند صور و معانی مختلف را با یکدیگر ترکیب یا از یکدیگر تفکیک نماید [۵، ج ۳، ص ۶۶۰]. بنابراین، متخیله با خیال متفاوت است.

در ورای این حواس پنج‌گانه‌ی ظاهر و باطنی، انسان، به صورت کاملاً اختصاصی، قوه‌ی دیگری دارد که عقل یا عاقله نامیده می‌شود که می‌تواند صور و معانی کلی را درک نماید در حالی که حواس ظاهری و باطنی امور جزیی، اعم از صورت یا معنا، را درک می‌کردند.

فلاسفه موضوعات ریاضی مانند عدد را از سنخ معنا برمی‌شمارند که ادراک آنها بر عهده‌ی قوه‌ی واژه است. بنابراین، از دیدگاه آنان ریاضیات یک علم وهمی است؛ یعنی فهم ریاضیات با حواس ظاهری ممکن نیست اگرچه حواس ظاهری به عنوان مقدمات ادراک ریاضیات کارایی دارد اما ادراک نهایی مسائل ریاضی با قوه‌ی واژه است. پرواضح است که اصطلاح وهم در فلسفه با آنچه که در عرف و میان مردم جریان دارد، بسیار متفاوت است. وهم در فلسفه نه تنها به امر پوچ دلالت نمی‌کند، بلکه به معانی تعلق می‌گیرد که از نظر رتبه‌ی وجودی و نیز میزان شرافت، از امور محسوس بالاتر و کاملتر است.

۳. جایگاه عدد در نزد فیلسوفان مسلمان

فیلسوفان مسلمان، کمیت را در زمره‌ی اعراض می‌دانستند [۱۰، ص ۱۷۷]. عرض عبارت است از ماهیتی که برای موجود شدن نیازمند به تکیه بر یک امر مستقل است. مثلاً رنگ عرض است، یعنی تا جسمی نباشد، رنگ نمی‌تواند به وجود بیاید. شیرینی و ترشی عرض هستند چرا که تا چیزی مانند قند یا لیمو نباشد، این طعم‌ها و مزه‌ها نمی‌توانند وجود پیدا کنند. کمیت هم عرضی است که تا شیء دیگری نباشد، کمیت هم نخواهد بود. ویژگی مهم کمیت که اساساً ذاتی آن است، عبارت است از اینکه قابل تقسیم است. فیلسوفان مسلمان این ویژگی را مختص به کمیت می‌دانند و به همین خاطر کمیت را به عرضی تعریف می‌کنند که ذاتاً قابل تقسیم است [۶، ص ۱۷۷]. به عبارت دیگر، هر چیزی که بتواند تقسیم شود، یا خود کمیت است یا دارای کمیت می‌باشد. بنابراین، اگر کاغذ، پارچه و چیز دیگری قابل تقسیم است، به این خاطر است که دارای کمیت و اندازه است؛ پس تقسیم‌پذیری ذاتاً از آن کمیت است. فلاسفه کمیت را به متصل و منفصل تقسیم می‌کنند. کم متصل، کمیتی است که دارای حد مشترک است یعنی هر جزء فرضی آن می‌تواند ابتدای قسمتی و انتهای قسمت دیگری باشد بر خلاف کم منفصل یعنی عدد که حد مشترک ندارد؛ بلکه منفصل و منفک از یکدیگرند. کم متصل، خود دو گونه است، برخی از کمیت‌های متصل، قار هستند؛ یعنی قرار دارند مانند خط که با رسم هر جزئی از آن، جزء قبل فانی نمی‌شود. برخی دیگر از کمیت‌های متصل، غیرقارند، یعنی از قرار و ثبات بی‌بهره‌اند. مانند زمان. زمان از دیدگاه فلاسفه اسلامی، کمیت است. آنها زمان را مقدار حرکت می‌دانند و چون حرکت، ثبات ندارد، مقدار آن هم - یعنی زمان - امری ناپایدار و غیرثابت است که با به وجود آمدن هر جزئی از آن، جز قبل فانی می‌شود. خود کم متصل قار سه دسته است؛ یا تک بُعدی است که خط نامیده می‌شود، یا دو بُعدی است که به آن سطح گفته می‌شود و یا سه بُعدی است که آن را اصطلاحاً «جسم تعلیمی» یا همان حجم می‌خوانند.

به اعتقاد فیلسوفان کم منفصل همان عدد است که از تکرار یک به وجود می‌آید. بر این اساس، خود یک عدد نیست، اما عدساز است. نه تنها یک عدد نیست بلکه اساساً کمیت نیست چرا که تعریف کمیت بر آن صادق نمی‌باشد. بنابراین، از دیدگاه فلاسفه مسلمان، عدد از ۲ شروع می‌شود و به صورت بالقوه می‌تواند تا بی‌نهایت ادامه پیدا کند. اما هر عدد، مجموعه‌ای از واحدهاست یعنی عدد ۲، از دو تا ۱ تشکیل شده، و عدد ۳ از سه تا ۱ و همین‌طور. بنابراین، بنیان هر عددی، ۱ است اما تعداد دفعات تکرار ۱ در هر عدد متفاوت است. برخی از فیلسوفان همین رابطه‌ی میان ۱ و اعداد را به رابطه‌ی میان خداوند و موجودات عالم تسری دادند. ملاصدرا در برخی از تمثیل‌هایی که می‌آورد، رابطه‌ی خداوند با عالم را به رابطه‌ی میان ۱ و اعداد تشبیه

ششمین همایش ملی ریاضی و آمار

<https://conf.gonbad.ac.ir/msc1404>

می‌کند و می‌گوید همان‌طور که ۱ خودش عدد نیست، اما عددساز است و باطن اعداد، چیزی جز ۱ نمی‌باشد، خداوند هم هیچ یک از موجودات عالم نیست (نفی حلول و اتحاد) اما در عین حال حقیقت تمام موجودات و ظاهر و باطن آنها را دربر گرفته است [۱۴، ص ۶۶].

۴. نتیجه‌گیری

از دیدگاه فلاسفه مسلمان علم ریاضی نه تنها در روش خود که روشی برهانی است، با فلسفه اشتراک دارد، بلکه در تقویت ذهن فیلسوف برای کشف حقایق مربوط به نظام وجود، کمک می‌کند. از دیدگاه آنان چون ریاضیات نسبت به علوم تجربی، رابطه‌ی کمتری با ماده و موجودات مادی دارد، بنابراین، نسبت به آن در مقام والاتری است اما چون این ارتباط نسبت به فلسفه پررنگ‌تر است، بنابراین، در رتبه‌ی نازلتری نسبت به فلسفه طبقه‌بندی می‌شوند. از نگاه آنان ریاضیات و عدد یک علم وهمی است، اما معنای وهم با توهم که در عرف به معنای تصور امور غیرواقعی است، متفاوت است. منظور از وهم ادراک اموری است که خود محسوس و مادی نیستند اما با موجودات محسوس در ارتباطند، مانند ادراک محبت که خود محبت امری مادی و دارای شکل و رنگ و اندازه نیست اما میان انسان‌ها که موجوداتی مادی هستند، شکل می‌گیرد. بر این اساس، جایگاه علم ریاضی در نگاه فیلسوفان مسلمان - به تبع از فیلسوفان یونان باستان - جایگاه میانه‌ای است یعنی در میانه‌ی علوم تجربی و فلسفه جای گرفته است به همین خاطر آنها ریاضیات را به عنوان فلسفه وسطی در مقابل فلسفه اولی و فلسفی سفلی نام‌گذاری می‌کردند.

۵- مراجع

- [۱] ابن‌سینا، ح. رسائل، انتشار بیدار، قم، ۱۴۰۰ق.
- [۲] ابوالبرکات بغدادی، ه. المعترف فی الحکمة، گردآورنده اکبری، ف. دانشگاه اصفهان، اصفهان، جلد سوم، چاپ دوم، ۱۳۷۳.
- [۳] دی‌بور، ت. تاریخ الفلسفة فی الإسلام، مترجم ابوریثه، م. دار النهضة العربیة، بیروت، چاپ اول، ۱۳۶۱ق.
- [۴] شیخ اشراق، ی. مجموعه مصنفات، به تصحیح و مقدمه کرین، ه. نصر، ح. حبیبی، ن. مؤسسه مطالعات و تحقیقات فرهنگی، تهران، جلد اول، چاپ دوم، ۱۳۷۵.
- [۵] شهرزوری، ش. رسائل الشجرة الإلهیة فی علوم الحقائق الربانیة، تصحیح حبیبی، ن. مؤسسه حکمت و فلسفه ایران، تهران، جلد اول و سوم، چاپ اول، ۱۳۸۳.
- [۶] طباطبایی، م. بدایة الحکمة، جماعة المدرّسین فی الحوزة العلمیة بقم، قم، چاپ اول، ۱۴۰۲ق.
- [۷] طباطبایی، م. نهایة الحکمة، مصحح فیاضی، غ. مؤسسه آموزشی و پژوهشی امام خمینی، قم، جلد ۴، چاپ چهارم، ۱۳۸۶.
- [۸] غازی، ا. فصوص الحکمة و شرحه، اصل کتاب از فارابی. انجمن آثار و مفاخر فرهنگی، تهران، چاپ اول، ۱۳۸۱.
- [۹] فارابی، م. السیاسة المدنیة، بوملحم، ع. مکتبة الهلال، بیروت، چاپ اول، ۱۹۹۶.
- [۱۰] فارابی، م. فصوص الحکم، تحقیق از آل یاسین، م. انتشارات بیدار، قم، چاپ دوم، ۱۴۰۵ق.
- [۱۱] ملاصدرا، م. شرح الهدایة الأثریة، تصحیح فولادکار، م. مؤسسه تاریخ العربی، بیروت، چاپ اول، ۱۴۲۲ق.
- [۱۲] ملاصدرا، م. المشاعر، کرین، ه. کتابخانه طهوری، تهران، چاپ دوم، ۱۳۶۳.
- [۱۳] ملاصدرا، م. مفاتیح الغیب، مصحح محمد خواجوی، مؤسسه تحقیقات فرهنگی، تهران، چاپ اول، ۱۳۶۳.
- [۱۴] ملاصدرا، م. الشواهد الربوبیة فی المناهج السلوکیة، تصحیح و تعلیق از آشتیانی، ج. مرکز الجامعی للنشر، مشهد، چاپ دوم، ۱۳۶۰.



ششمین همایش ملی ریاضی و آمار

<https://conf.gonbad.ac.ir/msc1404>

F-255، صص ۱۴۲-۱۴۶.

هوم- زیر جبر لی فازی ناهموار

تکتم حقدادی

گروه علوم پایه دانشگاه صنعتی بیرجند؛ birjandut.ac.ir@haghdadi

چکیده

در این مقاله ابتدا با استفاده از یک رابطه هم‌ارزی و یک مجموعه فازی ناهموار روی یک هوم-جبر لی به معرفی هوم-جبرهای لی فازی ناهموار می‌پردازیم. در ادامه برخی از خواص این زیرجبرها را معرفی می‌کنیم و نشان می‌دهیم تحت چه شرایطی تصویر یک هوم-زیرجبر فازی ناهموار، یک زیرجبر فازی ناهموار خواهد بود.

کلمات کلیدی: هوم-جبرلی، هوم-جبرلی فازی، هوم-زیر جبرلی فازی ناهموار، همریختی هوم-جبرهای لی فازی ناهموار.

۱ پیش‌گفتار

مفهوم هوم-جبرلی، نخستین بار در سال ۲۰۰۶ توسط هارتویگ و همکاران [3] در مطالعه مشتقات از یک جبر شرکت‌پذیر معرفی گردید. سپس مخلوف نیز به مطالعه هوم-جبرهای لی علاقه‌مند شد و بررسی این گونه از جبرها را با جدیت دنبال کرد. سرانجام در سال ۲۰۰۸ مخلوف با همکاری سیلوسترو، مقاله‌ای را تحت عنوان ساختارهای هوم-جبر ارائه کردند [4]. در سال‌های اخیر هوم-جبرهای لی به موضوعی جذاب در ریاضیات و فیزیک تبدیل شده‌اند. مفهوم هوم-جبرلی فازی و هوم-لی ایده‌آل فازی در [5] معرفی شد و ارتباط بین هوم-زیر جبر لی فازی و هوم-زیر جبر لی مورد بررسی قرار گرفت.

نظریه‌ی مجموعه‌های ناهموار توسط ریاضیدان لهستانی، پائولاک معرفی شد. در این نظریه برخلاف نظریه‌ی مجموعه‌ها که اعضاء نقش اساسی در معرفی مجموعه دارند، تعریف مجموعه به فهم و ادراک ما از اعضاء مجموعه‌ی مرجع بستگی دارد. در نظریه‌ی مجموعه‌های ناهموار رابطه‌های هم‌ارزی نقش اساسی برای تعریف تقریب‌های پایینی و بالایی یک زیرمجموعه از مجموعه‌ی مرجع، بازی می‌کنند و رویکرد این نظریه به تجزیه و تحلیل داده‌ها منوط به این دو مفهوم است.

اکرم در [1] زیر جبرلی فازی ناهموار و ایده‌آل فازی ناهموار را بر حسب یک رابطه هم‌ارزی و یک مجموعه فازی معرفی کرد. اقدامی و همکاران در [2] مفهوم ایده‌آل‌لی ناهموار بر حسب یک رابطه هم‌ارزی را معرفی کرده و خواص این دسته از ایده‌آل‌ها را مورد بررسی قرار دادند. در این مقاله به معرفی مفهوم هوم-جبرلی فازی ناهموار با استفاده از یک هوم-زیرجبرلی فازی و یک رابطه هم‌ارزی می‌پردازیم و در ادامه برخی از خواص این زیر جبرها را مورد بررسی قرار می‌دهیم. در باقیمانده این بخش به بیان برخی از مفاهیم مورد نیاز در ادامه کار می‌پردازیم. فرض کنید X یک مجموعه‌ی مرجع و R یک رابطه‌ی هم‌ارزی روی X باشد. تقریب پایینی و بالایی از یک مجموعه فازی $S \in F(X)$ را به ترتیب با \underline{RS} و \overline{RS} نشان داده و برای هر $x \in X$ به صورت

ششمین همایش ملی ریاضی و آمار

<https://conf.gonbad.ac.ir/msc1404>

زیر تعریف می‌کنیم؛

$$(\underline{RS})(x) = \bigwedge_{y \in [x]_R} S(y) \quad , \quad \overline{RS}(x) = \bigvee_{y \in [x]_R} S(y)$$

و زوج $RS = (\underline{RS}, \overline{RS})$ را یک مجموعه فازی ناهموار می‌نامیم. [1]

تعریف ۱.۱۰. [3] سه تایی $(L, [,], \alpha_L)$ که در آن L یک فضای برداری روی میدان L, \mathbb{F} $[-, -]: L \times L \rightarrow L$ ، یک نگاشت دو خطی (کروشه لی) و $\alpha_L: L \rightarrow L$ یک همریختی جبری است، یک هوم-جبرلی نامیده می‌شود هرگاه شرایط زیر برقرار باشند:

$$[x, y] = -[y, x] \quad (\text{یاد متقارنی}) \bullet$$

$$[\alpha_L(x), [y, z]] + [\alpha_L(z), [x, y]] + [\alpha_L(y), [z, x]] = 0 \bullet$$

فرض کنید $(L_1, [-, -]_{L_1}, \alpha_{L_1})$ و $(L_2, [-, -]_{L_2}, \alpha_{L_2})$ دو هوم-جبرلی باشند. نگاشت خطی $\varphi: L_1 \rightarrow L_2$ را یک همریختی هوم-جبرلی گوییم هرگاه برای هر $x, y \in L$ شرایط زیر برقرار باشد:

$$\bullet \varphi([x, y]_1) = [\varphi(x), \varphi(y)]_2$$

$$\bullet \varphi \circ \alpha_1(x) = (\alpha_2 \circ \varphi)(x)$$

تعریف ۲.۱. [5] مجموعه فازی μ روی هوم-جبرلی $(L, [,], \alpha_L)$ را یک هوم-زیر جبرلی فازی می‌نامیم هرگاه برای هر $x, y \in L$ و هر $k \in \mathbb{F}$ شرایط زیر برقرار باشند:

$$\bullet \mu(x + y) \geq \mu(x) \wedge \mu(y)$$

$$\bullet \mu(kx) \geq \mu(x)$$

$$\bullet \mu([x, y]) \geq \mu(x) \wedge \mu(y)$$

$$\bullet \mu(\alpha(x)) \geq \mu(x)$$

اگر شرط سوم را با شرط $\mu([x, y]) \geq \mu(x) \vee \mu(y)$ جایگزین کنیم، آنگاه μ را یک هوم-ایده‌آل فازی می‌نامیم.

۲ هوم-زیر جبرلی فازی ناهموار

در این بخش به معرفی مفهوم هوم-زیر جبرلی فازی ناهموار روی یک هوم-جبرلی می‌پردازیم و برخی از خواص این دسته از زیر جبرها را بررسی می‌کنیم.

تعریف ۱.۲. فرض کنید (RS, \overline{RS}) یک مجموعه فازی ناهموار روی هوم-جبرلی $(L, [,], \alpha_L)$ باشد. زوج (RS, \overline{RS}) را یک هوم-زیر جبر فازی ناهموار روی $(L, [,], \alpha_L)$ می‌نامیم، اگر در شرایط زیر صدق کنند:

$$\bullet (\underline{RS})(x + y) \geq (\underline{RS})(x) \wedge (\underline{RS})(y), \quad (\overline{RS})(x + y) \geq (\overline{RS})(x) \wedge (\overline{RS})(y)$$

$$\bullet (\underline{RS})(\gamma x) \geq (\underline{RS})(x), \quad (\overline{RS})(\gamma x) \geq (\overline{RS})(x)$$

ششمین همایش ملی ریاضی و آمار

<https://conf.gonbad.ac.ir/msc1404>

$$\begin{aligned} (\underline{RS})([x, y]) &\geq (\underline{RS})(x) \wedge (\underline{RS})(y), & (\overline{RS})([x, y]) &\geq (\overline{RS})(x) \wedge (\overline{RS})(y) \\ (\underline{RS})(\alpha(x)) &\geq (\underline{RS})(x), & (\overline{RS})(\alpha(x)) &\geq (\overline{RS})(x) \end{aligned}$$

مثال ۲-۲. هوم-جبر لی $(L, [,], \alpha_L)$ روی میدان \mathbb{F} را در نظر بگیرید به طوری که L یک فضای برداری با پایه $\{c_1, c_2, c_3\}$ باشد. نگاشت خطی $\alpha_L: L \rightarrow L$ به صورت $\alpha(c_1) = c_2, \alpha(c_2) = \alpha(c_3) = 0$ و کرشه لی هم به صورت $[c_1, c_3] = c_1, [c_2, c_3] = [c_1, c_2] = 0, [c_i, c_i] = 0$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$S(x) = \begin{cases} 0/9 & x = 0 \\ 0/4 & x \in \langle c_1, c_2 \rangle, x \neq 0 \\ 0/2 & o. \omega \end{cases}$$

هم چنین رابطه ارزی R روی L را مطابق جدول ۱ تعریف می‌کنیم.

جدول ۱: رابطه هم ارزی فاز R

R	0	$\gamma_1 c_1 + \gamma_2 c_2 (\gamma_1 \neq 0 \text{ یا } \gamma_2 \neq 0)$	$\delta_1 c_1 + \delta_2 c_2 + \delta_3 c_3$
0	1	0	0
$\gamma_1 c_1 + \gamma_2 c_2 (\gamma_1 \neq 0 \text{ یا } \gamma_2 \neq 0)$	0	1	1
$\delta_1 c_1 + \delta_2 c_2 + \delta_3 c_3$	0	1	1

در این صورت می‌توان نشان داد که R یک رابطه هم ارزی فاز بوده و علاوه بر این

$$(\overline{RS})(x) = \begin{cases} 0/9 & x = 0 \\ 0/4 & x \in \langle c_1, c_2 \rangle, x \neq 0 \\ 0/4 & o. \omega \end{cases} \quad (\underline{RS})(x) = \begin{cases} 0/9 & x = 0 \\ 0/2 & x \in \langle c_1, c_2 \rangle, x \neq 0 \\ 0/2 & o. \omega \end{cases}$$

می‌باشند. بنا به تعریف ۱، ۲، \underline{RS} و \overline{RS} هوم-زیر جبرهای لی فاز بوده و لذا $(\underline{RS}, \overline{RS})$ یک هوم-زیر جبرلی فاز ناهموار می‌باشد.

گزاره ۳، ۲. فرض کنید $\{(RS_i, \overline{RS}_i)\}_{i \in I}$ یک خانواده از هوم-جبرهای فاز ناهموار روی هوم-جبرلی $(L, [,], \alpha_L)$ در این صورت:

- $\bigwedge_{i \in I} (RS_i, \overline{RS}_i)$ یک زیر هوم-زیر جبر فاز ناهموار روی L است.
- $\bigvee_{i \in I} (RS_i, \overline{RS}_i)$ یک زیر هوم-زیر جبر فاز ناهموار روی L است.

گزاره ۴، ۲. فرض کنید $\varphi: (L_1, [-, -]_{L_1}, \alpha_{L_1}) \rightarrow (L_2, [-, -]_{L_2}, \alpha_{L_2})$ یک همریختگی از هوم-جبرهای لی باشد.

در این صورت اگر $(\underline{QT}, \overline{QT})$ یک هوم-زیر جبر فاز ناهموار از L_2 باشد، آنگاه $\varphi^{-1}(\underline{QT}, \overline{QT})$ تعریف شده به صورت

ششمین همایش ملی ریاضی و آمار

<https://conf.gonbad.ac.ir/msc1404>

$$\varphi^{-1}(\underline{QT}, \overline{QT})(x) = ((\underline{QT})(\varphi(x)), (\overline{QT})(\varphi(x))) \quad \forall x \in L_1$$

یک هوم زیر جبر فازی ناهموار از L_1 خواهد بود.

تعریف ۵.۲. فرض کنید $\varphi: (L_1, [-, -]_{L_1}, \alpha_{L_1}) \rightarrow (L_2, [-, -]_{L_2}, \alpha_{L_2})$ یک همریختگی از هوم-جبرهای لی

باشد. اگر $(\underline{RS}, \overline{RS})$ یک مجموعه فازی ناهموار روی L_1 باشد، آنگاه تصویر φ با تعاریف زیر، یک مجموعه فازی ناهموار است.

$$\varphi(\overline{RS})(y) = \begin{cases} \bigvee_{t \in L_1, f(t)=y} (\overline{RS})(t) & \varphi^{-1}(y) \neq \emptyset \\ 1 & o.w \end{cases}$$

9

$$\varphi(\underline{RS})(y) = \begin{cases} \bigvee_{t \in L_1, f(t)=y} (\underline{RS})(t) & \varphi^{-1}(y) \neq \emptyset \\ 1 & o.w \end{cases}$$

گزاره ۶.۲. فرض کنید $\varphi: (L_1, [-, -]_{L_1}, \alpha_{L_1}) \rightarrow (L_2, [-, -]_{L_2}, \alpha_{L_2})$ یک همریختگی یک به یک از هوم-جبرهای

لی باشد. در این صورت اگر $(\underline{RS}, \overline{RS})$ یک هوم-زیر جبر فازی ناهموار از L_1 باشد، آنگاه تصویر $(\underline{RS}, \overline{RS})$ تحت φ یک هوم-زیر جبر لی فازی ناهموار از L_2 خواهد بود.

گزاره ۷.۲. فرض کنید H یک هوم-ایده آل از هوم-جبر لی $(L, [,]_L, \alpha_L)$ باشد. اگر $(\underline{RS}, \overline{RS})$ یک هوم-ایده آل

فازی ناهموار از L باشد، آنگاه مجموعه فازی ناهموار $(\overline{\underline{RS}}, \overline{\overline{RS}})$ تعریف شده با

$$\overline{\underline{RS}}(a + H) = \bigvee_{x \in H} \underline{RS}(a + x), \quad \overline{\overline{RS}}(a + H) = \bigvee_{x \in H} \overline{RS}(a + x)$$

یک هوم-ایده آل ناهموار روی هوم-جبر خارج از قسمتی $(\frac{L}{H}, \overline{[-, -]}_L, \overline{\alpha}_L)$ خواهد بود.

تعریف ۸.۲. فرض کنید A و B دو مجموعه و $f: A \rightarrow B$ یک تابع باشد. مجموعه فازی ناهموار $(\underline{RS}, \overline{RS})$ را ناوردا

تحت f می نامیم اگر و تنها اگر $f(x) = f(y)$ برای هر $x, y \in A$ نتیجه دهد که

$$(\overline{RS})(x) = \overline{RS}(y) \underline{RS}(x) = \underline{RS}(y)$$

گزاره ۹.۲. فرض کنید $\varphi: (L_1, [-, -]_{L_1}, \alpha_{L_1}) \rightarrow (L_2, [-, -]_{L_2}, \alpha_{L_2})$ یک همریختگی پوشا از هوم-جبرهای لی

باشد. مجموعه فازی ناهموار $(\underline{RS}, \overline{RS})$ یک هوم-جبر فازی ناهموار ناوردا تحت φ است اگر و تنها اگر

$$\varphi(\underline{RS}, \overline{RS}) = (\varphi(\underline{RS}), \varphi(\overline{RS}))$$

یک هوم-زیر جبر فازی ناهموار از L_2 باشد.



ششمین همایش ملی ریاضی و آمار

<https://conf.gonbad.ac.ir/msc1404>

۳. مراجع

- [1] M. Akram, Rough Fuzzy Lie Algebras. In: Fuzzy Lie Algebras. Springer, Singapore (2018), 249–272.
- [2] H. Eghdami, A.A. Estaji and T. Haghdadi, Fuzzy roughness in Lie algebra by reference point, Journal of Intelligent and Fuzzy Systems, 35 (2018), 1–13.
- [3] J. Hartwig, D. Larsson, and S. Silvestrov, Deformations of Lie algebras using σ -derivations, Journal of Algebra, 295 (2006), no. 2, 314–361.
- [4] A. Makhlouf A. S. Silvestrov, Hom-algebra structures, J. Gen. Lie Theory Appl., 2 (2008), 51-64 [5] S. Sharaqha, Fuzzy Hom–Lie Ideals of Hom–Lie Algebras, Axioms , 12 (2023), no. 7.

ششمین همایش ملی ریاضی و آمار

<https://conf.gonbad.ac.ir/msc1404>

F-275، صص ۱۴۷-۱۵۳.

حل معادلات دیفرانسیل کسری با استفاده از توابع ترکیبی گنوجی

سید مهدی شفیعی اف

عضو هیئت علمی گروه ریاضی، دانشگاه پیام نور، صندوق پستی ۳۶۹۷-۱۹۳۹۶، تهران، ایران، smshafiof@pnu.ac.ir

چکیده

در این مقاله، روشی عددی مبتنی بر کاربرد توابع پایه ترکیبی گنوجی و روش هم‌مکانی برای حل معادلات دیفرانسیل کسری با مشتق کاپوتو ارائه شده است. توابع ترکیبی گنوجی گسسته شده روی زیربازه‌ها با خواص متعامد و انعطاف‌پذیر، ابزار مناسبی برای تقریب جواب‌های این معادلات محسوب می‌شوند. روش هم‌مکانی نیز با تبدیل مساله به یک سیستم جبری، امکان حل عددی کارآمد را فراهم می‌آورد. محاسبه عملگر مشتق کسری کاپوتو توابع ترکیبی گنوجی به صورت مستقیم و بدون تقریب در افزایش دقت و سرعت همگرایی روش تاثیر گذار است. کارایی و دقت روش در حل دو مثال عددی نشان داده شده است.

کلمات کلیدی: معادلات دیفرانسیل کسری؛ توابع ترکیبی گنوجی؛ عملگر مشتق کسری؛ روش هم‌مکانی.

۱- مقدمه

معادلات دیفرانسیل کسری در چند دهه اخیر توجه چشمگیری را در جوامع علمی و مهندسی به خود جلب کرده‌اند. این معادلات که مشتقات مرتبه کسری را شامل می‌شوند، تعمیمی از معادلات دیفرانسیل معمولی محسوب می‌شوند. بر خلاف مشتقات مرتبه صحیح که تنها به وضعیت لحظه‌ای سیستم وابسته هستند، مشتقات کسری حافظه سیستم و تاریخچه آن را در نظر می‌گیرند. این ویژگی منحصر به فرد، مدل‌سازی پدیده‌های پیچیده‌ای را ممکن می‌سازد که در آنها اثرات گذشته بر رفتار فعلی سیستم تاثیر می‌گذارد. کاربردهای معادلات دیفرانسیل کسری در حوزه‌های متعددی مشاهده می‌شود:

- فیزیک و مهندسی: مدل‌سازی مواد ویسکوالاستیک، انتقال حرارت، دینامیک سیالات
- زیست‌شناسی و پزشکی: مدل‌سازی انتشار دارو در بافت‌های زیستی، دینامیک جمعیت، رشد تومور
- اقتصاد و مالی: مدل‌سازی بازارهای مالی با حافظه بلندمدت، قیمت‌گذاری اختیار معامله
- علوم مواد: توصیف رفتار پلیمرها، کامپوزیت‌ها و مواد هوشمند
- کنترل و پردازش سیگنال: طراحی کنترل‌کننده‌های کسری، فیلترهای فراکشنال

حل تحلیلی معادلات دیفرانسیل کسری به ندرت ممکن است و حتی برای معادلات ساده نیز اغلب به صورت توابع ویژه پیچیده بیان می‌شوند. این امر توسعه روش‌های عددی کارآمد را ضروری ساخته است. روش‌های متعددی برای حل عددی معادلات دیفرانسیل کسری توسعه یافته‌اند که هر کدام مزایا و محدودیت‌های خاص خود را دارند به عنوان نمونه به روش‌های تفاضلی، المان محدود، روش‌های طیفی و تابعی می‌توان اشاره نمود [۱].

توابع گنوجی دسته‌ای از چندجمله‌ای‌های متعامد هستند. این توابع دارای ویژگی‌های متمایزی هستند که آنها را برای حل معادلات دیفرانسیل مناسب می‌سازد [۲]:

- خاصیت تعامد: توابع گنوجی بر بازه $[0,1]$ متعامد هستند

ششمین همایش ملی ریاضی و آمار

<https://conf.gonbad.ac.ir/msc1404>

- پایایی عددی: ضرایب با دقت بالا محاسبه می‌شوند
- همگرایی سریع: نرخ همگرایی نمایی برای توابع هموار
- انعطاف‌پذیری: قابلیت تطبیق با شرایط مرزی مختلف
- سادگی محاسباتی: روابط بازگشتی ساده برای تولید توابع

توابع پایه ترکیبی، که شامل ترکیب توابع بلاک-پالس با چندجمله‌ای‌های خاص هستند، به عنوان یک تکنیک ریاضی قدرتمند برای حل طیف وسیعی از مسائل مورد استفاده قرار گرفته‌اند. در این مقاله، با ترکیب تابع بلاک-پالس و چندجمله‌ای‌های گنوجی، یک تابع پایه قطعه‌ای می‌سازیم. سپس عملگر مشتق کسری کاپوتو توابع ترکیبی گنوجی را به صورت مستقیم و بدون تقریب محاسبه می‌کنیم. روش هم‌مکانی از روش‌های حل معادلات دیفرانسیل است که در آن جواب به صورت ترکیب خطی از توابع پایه تقریب زده می‌شود و شرط برقراری معادله در نقاط گسسته اعمال می‌گردد. این مقاله به صورت زیر سازماندهی شده است: در بخش دوم، تعاریف مقدماتی و خواص مورد نیاز ارائه شده است. در بخش سوم عملگر مشتق کسری توابع ترکیبی گنوجی را محاسبه می‌کنیم. در بخش چهارم روش حل معادله دیفرانسیل کسری با استفاده از توابع ترکیبی و روش هم‌مکانی بیان شده است. در پایان نتایج عددی و کارایی روش در حل دو مساله به تفصیل مورد بررسی قرار گرفته است.

۲- مقدمات و پیش‌نیاز

در این بخش، برخی از تعاریف و روابط مورد نیاز در محاسبات ارائه می‌گردد. فرض می‌کنیم α مرتبه مشتق کسری و $m = [\alpha] + 1$ که $[\]$ نمایشگر جزء صحیح می‌باشد [۲].

تعریف ۱.۲- مشتق چپ کسری کاپوتو از مرتبه α ، به صورت زیر تعریف می‌شود:

$${}_a^C D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{m-\alpha-1} f^{(m)}(\tau) d\tau, \quad (1)$$

یک خاصیت مهم مشتق کاپوتو عبارت است از

$${}_0^C D_t^\alpha t^r = \begin{cases} 0, & r \in N_0, r < m, N_0 = N \cup \{0\}, \\ \frac{\Gamma(r+1)}{\Gamma(r+1-\alpha)} t^{r-\alpha}, & r \in N_0, r \geq m \text{ یا } r \notin N, r > m \end{cases} \quad (2)$$

هنگامی که $\alpha = Z$ ، یعنی مرتبه مشتق یک عدد صحیح باشد، مشتق کسری به مشتق معمولی تبدیل می‌گردد.

تعریف ۲.۲- چندجمله‌ای‌های گنوجی $G_n(t)$ صورت زیر تعریف می‌شود [۳]:

$$G_n(t) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} g_{n-k} t^k, \quad (3)$$

که $g_k = 2\alpha_k - 2^{k+1}\alpha_k$ عدد گنوجی و α_k عدد برنولی می‌باشند. چندجمله‌ای‌های گنوجی در خاصیت‌های زیر صدق می‌کنند

$$G_n(1-t) = (-1)^{n+1} G_n(t). \quad (4)$$

$$\frac{d^k}{dt^k} G_n(t) = \frac{n!}{(n-k)!} G_{n-k}(t), \quad (5)$$

تعریف ۳.۲- توابع ترکیبی گنوجی و بلاک‌پالس $q_{nm}(t)$ ، $n = 1, 2, \dots, N$ ، $m = 1, \dots, M$ در بازه $[0, 1]$ به صورت زیر تعریف می‌شود [۲]:

$$q_{nm}(t) = \begin{cases} G_m(Nt - n + 1), & t \in \left[\frac{n-1}{N}, \frac{n}{N}\right), \\ 0, & \text{در غیر این صورت} \end{cases} \quad (6)$$

ششمین همایش ملی ریاضی و آمار

<https://conf.gonbad.ac.ir/msc1404>

که m و n به ترتیب مرتبه چندجمله‌ای‌های گنوجی و توابع بلاک پالس می‌باشند. همچنین هر تابع $f \in L^2[0,1]$ را می‌توان با استفاده از توابع ترکیبی گنوجی به صورت زیر تقریب زد:

$$f \approx f_{NM} = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N c_{nm} q_{nm}(t) = C^T_{NM} Q_{NM}(t), \quad (7)$$

که در آن

$$C_{NM} = [c_{11}, c_{21}, \dots, c_{N1}, c_{12}, \dots, c_{N2}, \dots, c_{1M}, \dots, c_{NM}],$$

$$Q_{NM}(t) = [q_{11}(t), q_{21}(t), \dots, q_{N1}(t), q_{12}(t), \dots, q_{N2}(t), \dots, q_{1M}(t), \dots, q_{NM}(t)].$$

$Q_{NM}(t)$ توابع ترکیبی گنوجی و بردار C_{NM} بردار ضرایب مجهول می‌باشند.

۳- محاسبه عملگر مشتق کسری کاپوتو توابع ترکیبی گنوجی

عملگر مشتق کسری کاپوتو توابع ترکیبی گنوجی را با D^α نشان می‌دهیم. در گام نخست، فرض می‌کنیم $t \in \left[\frac{n-1}{N}, \frac{n}{N}\right]$, $i = [\alpha] + 1$ و (۶)، می‌نویسیم

$$\begin{aligned} {}_0^c D_t^\alpha q_{nm}(t) &= D^\alpha q_{nm}(t) = \frac{1}{\Gamma(i-\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{i-\alpha-1} q_{nm}^{(i)}(\tau) d\tau \\ &= \frac{1}{\Gamma(i-\alpha)} \int_0^t (\tau)^{i-\alpha-1} q_{nm}^{(i)}(t-\tau) d\tau = \frac{1}{\Gamma(i-\alpha)} \int_0^{t-\frac{n-1}{N}} \tau^{i-\alpha-1} G_m^{(i)}(N(t-\tau) - n + 1) d\tau, \end{aligned}$$

در نظر می‌گیریم $m \geq i$ در غیر این صورت $D^\alpha q_{nm}(t) = 0$ می‌باشد. با استفاده از خاصیت (۵)، از معادله بالا داریم:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\Gamma(i-\alpha)} \int_0^{t-\frac{n-1}{N}} \tau^{i-\alpha-1} \frac{m!}{(m-i)!} N^i G_{m-i}(N(t-\tau) - n + 1) d\tau \\ &= \frac{1}{\Gamma(i-\alpha)} \int_0^{t-\frac{n-1}{N}} \tau^{i-\alpha-1} \frac{m!}{(m-i)!} N^i G_{m-i} \left(N \left(\left(t - \frac{n-1}{N} \right) - \tau \right) \right) d\tau, \end{aligned}$$

با به کار بردن روابط (۱)، (۲)، (۵) و تغییر متغیر $T = t - \frac{n-1}{N}$ در معادله اخیر، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} D^\alpha q_{nm}(t) &= \frac{1}{\Gamma(i-\alpha)} \int_0^T \tau^{i-\alpha-1} \frac{m!}{(m-i)!} N^i G_{m-i}(N(T-\tau)) d\tau \\ &= \frac{1}{\Gamma(i-\alpha)} \int_0^T \tau^{i-\alpha-1} G_m^{(i)}(N(T-\tau)) d\tau = {}_0^c D_T^\alpha G_m(NT) \end{aligned}$$

$$= \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} N^k g_{m-k} {}_0^c D_T^\alpha (T^k) = \begin{cases} 0, & k < i \\ \sum_{k=i}^m \binom{m}{k} N^k \alpha_{m-k} \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k-\alpha+1)} T^{k-\alpha}, & k \geq i \end{cases}$$

ششمین همایش ملی ریاضی و آمار

<https://conf.gonbad.ac.ir/msc1404>

$$= \begin{cases} 0, & k < i \\ \sum_{k=i}^m \binom{m}{k} N^k g_{m-k} \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k-\alpha+1)} \left(t - \frac{n-1}{N}\right)^{k-\alpha}, & k \geq i. \end{cases} \quad (8)$$

برای $t \in \left[\frac{n}{N}, 1\right)$ با استفاده از معادلات (۱) و (۶)، قرار می‌دهیم

$$\begin{aligned} D^\alpha q_{nm}(t) &= \frac{1}{\Gamma(i-\alpha)} \int_0^t (\tau)^{i-\alpha-1} q_{nm}^{(i)}(t-\tau) d\tau \\ &= \frac{1}{\Gamma(i-\alpha)} \int_{t-\frac{n}{N}}^{t-\frac{n-1}{N}} \tau^{i-\alpha-1} G_m^{(i)}(N(t-\tau) - n + 1) d\tau \\ &= \frac{1}{\Gamma(i-\alpha)} \left(\int_0^{t-\frac{n-1}{N}} \tau^{i-\alpha-1} G_m^{(i)}(N(t-\tau) - n + 1) d\tau \right. \\ &\quad \left. - \int_0^{t-\frac{n}{N}} \tau^{i-\alpha-1} G_m^{(i)}(N(t-\tau) - n + 1) d\tau \right), \end{aligned}$$

انتگرال اول در این رابطه معادل (۸) می‌باشد. برای محاسبه انتگرال دوم با استفاده از خواص (۴) و (۵)، به صورت زیر عمل می‌کنیم

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\Gamma(i-\alpha)} \int_0^{t-\frac{n}{N}} \tau^{i-\alpha-1} G_m^{(i)}(N(t-\tau) - n + 1) d\tau \\ &= \frac{1}{\Gamma(i-\alpha)} \frac{m! N^i}{(m-i)!} \int_0^{t-\frac{n}{N}} \tau^{i-\alpha-1} G_{m-i}(1 - (-N(t-\tau) + n)) d\tau \\ &= \frac{(-1)^{m-i+1}}{\Gamma(i-\alpha)} \frac{m! N^i}{(m-i)!} \int_0^{t-\frac{n}{N}} \tau^{i-\alpha-1} G_{m-i} \left(-N \left(\left(t - \frac{n}{N}\right) - \tau \right) \right) d\tau \\ &= \frac{(-1)^{m+1}}{\Gamma(i-\alpha)} \int_0^{t-\frac{n}{N}} \tau^{i-\alpha-1} G_m^{(i)} \left(-N \left(\left(t - \frac{n}{N}\right) - \tau \right) \right) d\tau \end{aligned}$$

این معادله، با به کار بردن روندی مشابه مرحله قبل و تغییر متغیر $Z = t - \frac{n}{N}$ تبدیل می‌شود به

$$\begin{aligned} &(-1)^{m+1} \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} (-N)^k g_{m-k} {}_0^C D_Z^\alpha(Z^k) \\ &= \begin{cases} 0, & k < i \\ (-1)^{m+1} \sum_{k=i}^m \binom{m}{k} (-N)^k \alpha_{m-k} \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k-\alpha+1)} Z^{k-\alpha}, & k \geq i \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0, & k < i \\ (-1)^{m+1} \sum_{k=i}^m \binom{m}{k} (-N)^k \alpha_{m-k} \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k-\alpha+1)} \left(t - \frac{n}{N}\right)^{k-\alpha}, & k \geq i. \end{cases} \end{aligned}$$

(۹)

بنابراین

ششمین همایش ملی ریاضی و آمار

<https://conf.gonbad.ac.ir/msc1404>

$$D^\alpha q_{nm}(t) = \begin{cases} 0, & t \in \left[0, \frac{n-1}{N}\right), \\ Z_{nm}(t), & t \in \left[\frac{n-1}{N}, \frac{n}{N}\right), \\ Z_{nm}(t) - P_{nm}(t), & t \in \left[\frac{n}{N}, 1\right), \end{cases} \quad (10)$$

که $Z_{nm}(t)$ و $P_{nm}(t)$ برابر روابط (۸) و (۹) می باشند.

۴- بیان روش

معادله دیفرانسل کسری زیر را در نظر می گیریم:

$${}^C_0 D_t^\alpha y(t) = f(t, y(t)), \quad y(0) = y_0, \quad (11)$$

با استفاده از تقریب توابع ترکیبی گنوجی و عملگر مشتق کسری کاپوتو داریم:

$$D^\alpha \left(C^T {}_{NM} Q_{NM}(t) \right) - f \left(t, C^T {}_{NM} Q_{NM}(t) \right) \\ = \left(\sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N c_{nm} D^\alpha q_{nm}(t) \right) - f \left(t, \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N c_{nm} q_{nm}(t) \right) = 0$$

با جایگذاری نقاط هم مکانی لژاندر-گاوس $\{t_i\}_{i=0}^k$ برابر است با $k = NM - 1$ ، که ریشه های چندجمله ای لژاندر p_{k+1} می باشند، در معادله بالا، یک سیستم از معادلات جبری به صورت زیر به دست می آید:

$$\begin{cases} \left(\sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N c_{nm} D^\alpha q_{nm}(t_i) \right) - f \left(t_i, \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N c_{nm} q_{nm}(t_i) \right) = 0 \\ \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N c_{nm} q_{nm}(0) = y_0 \end{cases}$$

با حل این دستگاه کلیه ضرایب مجهول و جواب معادله تعیین می گردد.

۵- مثال های عددی

مثال ۵-۱: معادله زیر را در نظر می گیریم [۴]:

$${}^C_0 D_t^{\frac{3}{2}} y(t) + {}^C_0 D_t^2 y(t) + y(t) = 1 + t, \quad y(0) = 1, \quad \dot{y}(0) = 1. \quad (12)$$

جواب دقیق این معادله $y(t) = t + 1$ می باشد. با اسفاده از روش ارائه شده برای $N = 2, M = 3$ تابع $y(t)$ را به صورت زیر تقریب می زنیم:

$$y(t) = c_{11} q_{11}(t) + c_{12} q_{12}(t) + c_{13} q_{13}(t) + c_{21} q_{21}(t) + c_{22} q_{22}(t) + c_{23} q_{23}(t) \\ = c_{11} + c_{12}(4t - 1) + c_{13}(12t^2 - 6t) + c_{21} + c_{22}(4t - 3) + c_{23}(12t^2 - 18t + 16).$$

با جایگذاری در معادله (۱۲) و اعمال عملگر مشتق کسری کاپوتو و روش هم مکانی، ضرایب مجهول به صورت زیر به دست می آیند:

$$c_{11} = 1, c_{12} = 0, c_{13} = 0, c_{21} = 0.75, c_{22} = 0.25, c_{23} = 0,$$

که برابر با جواب دقیق معادله می باشد.

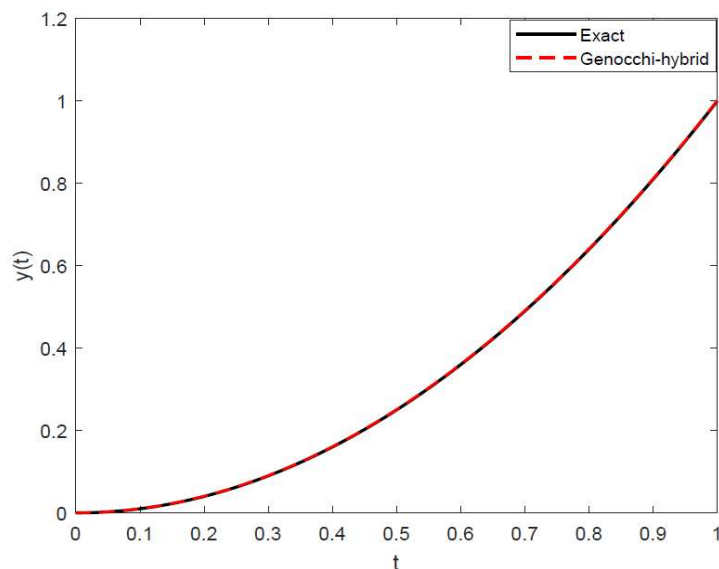
مثال ۵-۲: معادله دیفرانسیل با مشتق مرتبه کسری با جواب دقیق $y(t) = t^2$ به صورت زیر می باشد [۵]:

ششمین همایش ملی ریاضی و آمار

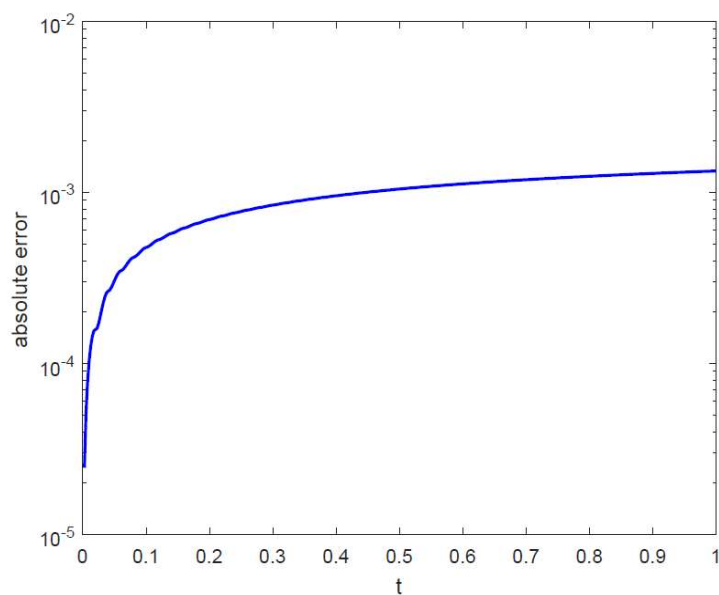
<https://conf.gonbad.ac.ir/msc1404>

$${}_0^c D_t^{0.6} y(t) + y(t) = \frac{2}{\Gamma(2.4)} t^{1.4} + t^2, y(0) = 0$$

با استفاده از روش ارائه شده برای $N = 2, M = 4$ جواب‌های دقیق و تقریبی در شکل ۱ و خطای مطلق جواب در شکل ۲ رسم شده‌اند.



شکل ۱: جواب‌های دقیق و تقریبی مثال ۵-۲



شکل ۲: خطای مطلق جواب مثال ۵-۲



ششمین همایش ملی ریاضی و آمار

<https://conf.gonbad.ac.ir/msc1404>

۶- نتیجه و جمع‌بندی

در این مقاله، روشی عددی برای حل معادلات دیفرانسیل کسری با مشتق کاپوتو ارائه شد که از توابع ترکیبی گنوجی به عنوان توابع پایه و روش هم‌مکانی برای تشکیل سیستم معادلات جبری استفاده می‌کند. همچنین عملگر مشتق کسری توابع ترکیبی گنوجی به منظور افزایش دقت روش بدون تقریب محاسبه گردید. نتایج عددی نشان داد که این روش از دقت و سرعت همگرایی خوبی برخوردار است. جهت کارهای آینده می‌توان کاربرد این روش را در معادلات دیفرانسیل کسری با تأخیر، سیستم‌های معادلات کسری و معادلات دیفرانسیل کسری جزئی گسترش داد.

۷- مراجع

- [1] Hilfer R. ; *Applications of Fractional Calculus in Physics*, World Scientific, 2010.
- [۲] شفیق اف مهدی، عسکری جواد، شمس سولاری مریم. حل عددی مسائل کنترل بهینه کسری با استفاده از عملگرهای کسری توابع ترکیبی گنوجی، پژوهش‌های ریاضی، ۹، (۱)، ۱۳۱-۱۶۳، ۱۴۰۲.
- [3] Phang C., Ismail N.F., Isah A. and Loh J.R.; *A new efficient numerical scheme for solving fractional optimal control problems via a Genocchi operational matrix of integration*, J. Vib. Control, no. 24(14), 3036–3048, 2017.
- [4] Kamran M., Kamal S. ; *Numerical solution of Bagley–Torvik equation including Atangana–Baleanu derivative arising in fluid mechanics*, Results in Physics, 49, 2023.
- [5] Bhrawy A.H., Alhamed Y.A., Baleanu D., Al-Zahrani A.A.; *New spectral techniques for systems of fractional differential equations using fractional-order generalized Laguerre orthogonal functions*. Fract. Calc. Appl. Anal. 17, 1137–1157, 2014.



آموزش ریاضی در عصر دیجیتال

سمیه تاری

استادیار، دانشگاه شهید مدنی آذربایجان، s_tari@azaruniv.ac.ir

چکیده

این مقاله به بررسی آموزش ریاضی در عصر دیجیتال و ارائه راهکارهای عملی مبتنی بر تجربه می‌پردازد. با توجه به ماهیت انتزاعی درس ریاضی و وجود ابزار جدید هوش مصنوعی در طرح و حل مسائل مختلف ریاضی، نیازمند راهبردهای نوین آموزشی هستیم تا علاوه بر انتقال مفاهیم دقیق ریاضی، توانایی یادگیری مفید و درست در دانشجویان ایجاد گردد. در این پژوهش به نتایج استفاده از هوش مصنوعی چت جی پی تی به عنوان کمک کننده به دانشجویان در یک کلاس درس پرداخته شده است. نتایج حاکی از افزایش مشارکت دانشجویان و بهبود درک مفاهیم پیچیده ریاضی است.

کلمات کلیدی: آموزش الکترونیکی، آموزش ریاضی، تاثیر چت جی پی تی در آموزش ریاضی، یادگیری تعاملی.

۱- مقدمه

این مقاله به بررسی آموزش ریاضی در عصر دیجیتال و ارائه راهکارهای عملی مبتنی بر تجربه می‌پردازد. با توجه به ماهیت انتزاعی درس ریاضی و وجود ابزار جدید هوش مصنوعی در طرح و حل مسائل مختلف ریاضی، نیازمند راهبردهای نوین آموزشی هستیم تا علاوه بر انتقال مفاهیم دقیق ریاضی، توانایی یادگیری مفید و درست در دانشجویان ایجاد گردد. در این پژوهش به نتایج استفاده از هوش مصنوعی چت جی پی تی به عنوان کمک کننده به دانشجویان در یک کلاس درس پرداخته شده است. نتایج حاکی از افزایش مشارکت دانشجویان و بهبود درک مفاهیم پیچیده ریاضی بوده است.

آموزش الکترونیکی به عنوان یک ضرورت در نظام آموزشی عصر حاضر مطرح است. با این حال، تدریس درس مفهومی مانند ریاضیات در این بستر با چالشهای منحصر به فردی روبروست. ماهیت انتزاعی مفاهیم ریاضی، نیازمند به تعامل مستقیم استاد و دانشجو است. این مقاله به تجربیات عملی در تدریس ریاضی به صورت ترکیبی از تدریس سنتی و الکترونیکی می‌پردازد. ادغام هوش مصنوعی در آموزش ریاضیات، باعث بهبود درک مفهوم ریاضی و افزایش توانای‌های استدلال دانشجویان شده است.

با وجود پیشرفتهای زیاد در زمینه هوش مصنوعی تحقیقات محدودی به بررسی استفاده از آن در یادگیری مفاهیم تحلیلی و اثباتی شده است. برای پر کردن این شکاف، این مطالعه یک مسیر یادگیری نوین کمک شده با استفاده از چت جی پی تی را معرفی می‌کند که هدف آن بهبود توانایی دانشجویان در ساخت و درک اثبات‌های ریاضی است. این پژوهش در سه مرحله آماده‌سازی آزمایش، طراحی آزمایش و تحلیل بازگشتی انجام شده است. داده‌ها از طریق مشاهده، مصاحبه و تحلیل اسناد جمع‌آوری و بررسی شده‌اند.

فرآیند یادگیری مفاهیم و اثبات‌های ریاضی از چالش‌های شناخت شده برای دانشجویان است. اثبات‌های ریاضی نه تنها برای تعمیق درک مفاهیم ریاضی حیاتی هستند، بلکه ابزارهای ضروری در توسعه، ساختاردهی و انتقال دانش ریاضی نیز محسوب می‌شوند [۱]. با این حال، ماهیت ذاتاً انتزاعی و استنتاجی ساخت اثبات و برهانهای ریاضی، آن را به یکی از دشواری ریاضی برای

ششمین همایش ملی ریاضی و آمار

<https://conf.gonbad.ac.ir/msc1404>

بسیاری از دانشجویان تبدیل کرده است [۲]. نویسندگان در [۳] تأیید می‌کنند که هر چند اثبات جنبه‌ای حیاتی از شایستگی ریاضی است، دانشجویان به ندرت این مهارت را به طور کافی در شیوه‌های آموزشی کنونی توسعه می‌دهند. دانشجویان تمایل زیادی به رویکردهای فرمولی دارند، مانند استفاده از جداول محاسبه مقادیر مثلثاتی، بدون درک یا به کارگیری کامل خواص توابع مثلثاتی. برای مثال، بسیاری از دانشجویان و دانش آموزان در محاسبه مقادیری مانند $\sin 210$ با مشکل مواجه می‌شوند و توانایی تشخیص یا ارتباط دادن روابط مختلف مثلثاتی را ندارند [۴]. این گرایش‌ها نشان می‌دهد که دانشجویان و دانش آموزان اغلب با ریاضیات به صورت سطحی و با تمرکز بر وظایف نتیجه محور سروکار دارند؛ در حالیکه اثبات مستلزم تفکر سطح بالا و ترکیب مفاهیم ریاضی است.

پیشرفت‌های سریع در فناوری‌های رایانه‌ای و اینترنت، به طور قابل توجهی نحوه دسترسی به اطلاعات و پردازش آن را دگرگون کرده‌اند و فرصت‌های جدیدی برای بهبود یادگیری ریاضی فراهم کرده‌اند [۵]. در میان این نوآوری‌ها، هوش مصنوعی به عنوان ابزاری برجسته در آموزش ظهور کرده است. هوش مصنوعی به سیستم‌های محاسباتی اطلاق می‌شود که برای انجام وظایفی طراحی شده‌اند که نیاز به هوش انسانی دارند [۶].

در سال ۲۰۲۰، رسانه‌های دیجیتال به چت جی پی تی، نوآوری فناوری‌های توجه کردند که رفتار غیرقابل پیش‌بینی داشت. ظهور چت جی پی تی علاقه عمومی را به تاثیرات مثبت و منفی آن در جامعه جلب کرد [۷]. یکی از پیشرفت‌های چت جی پی تی این است که امکان گفتگوی پویا و بلادرنگ بین کاربران و هوش مصنوعی را فراهم می‌کند که شبیه به تعاملات آموزشی در محیط‌های درسی است. چت جی پی تی پتانسیل قابل توجهی برای بهبود یادگیری دانشجویان و دانش آموزان با ارائه بازخورد فوری و تسهیل دسترسی به محتوای پیچیده دارد. پژوهش‌ها نشان می‌دهند که ۵۷٪ از دانش آموزان گزارش کرده‌اند که زمانی که یادگیری با کمک چت جی پی تی پشتیبانی می‌شوند، میزان مشارکتشان افزایش می‌یابد که نشان دهنده ظرفیت آن در ترویج مشارکت فعال در فرآیند یادگیری را دارد. لازم به ذکر است که در این مطالعه نیز دانشجویان شرکت کننده در این تحقیق بر تاثیر مستقیم چت جی پی تی در یادگیری موثر تاکید داشته‌اند.

در این مقاله ابتدا به روشهای مختلف استفاده از هوش مصنوعی در آموزش ریاضی اشاره شده است که در بخش روش شناسی آورده شده است. سپس در بخش نتیجه‌گیری به تاثیر این روشها در آموزش پرداخته شده است. با توجه به پیشرفت روزافزون هوش مصنوعی آشنایی و امتحان روشهای مختلف برای استفاده بهینه از این ابزار و کاهش مضرات آن در آموزش ریاضی لازم و ضروری می‌باشد.

۲- روش شناسی

این مطالعه، یک مداخله آموزشی نوین در حوزه آموزش ریاضیات را توسعه، پیاده سازی و ارزیابی می‌کند. این مداخله بر بهبود درک و توانایی دانشجویان در اثباتهای ریاضی از طریق ادغام فناوری چت جی پی تی به عنوان ابزاری کمک آموزشی متمرکز می‌باشد. شرکت کنندگان پژوهش شامل ۳۵ دانشجوی رشته ریاضی دانشگاه شهید مدنی آذربایجان می‌باشند. روش‌های جمع آوری داده شامل مشاهده کلاس، مصاحبه‌های هدفمند از دانشجویان، تحلیل اسناد و آزمون‌های سنجش توانایی ریاضی دانشجویان می‌باشد. داده‌های مشاهده شده با استفاده از رویکرد تحلیل کیفی مورد بررسی قرار گرفت که امکان بررسی جامع فرآیند یادگیری و توسعه مفهوم را فراهم کرد. این پژوهش در چهار چرخه تکرارشونده انجام شد که هر کدام سه مرحله را در چارچوب مطالعه اعتبارسنجی در بر می‌گرفت: مرحله آماده سازی، پیاده سازی آزمایش و تحلیل.

در چرخه اول یک جلسه درسی برگزار شد که مفاهیم توسط استاد بدون استفاده از چت جی پی تی تدریس شد و در پایان تمریناتی برای حل براساس مفاهیم تدریس شده در اختیار دانشجویان قرار گرفت که در این بخش دانشجویان مجاز به استفاده از چت جی پی تی برای حل تمرینات نبودند.



ششمین همایش ملی ریاضی و آمار

<https://conf.gonbad.ac.ir/msc1404>

در چرخه دوم یک جلسه درسی برگزار شد که ابتدا مفاهیم توسط استاد تدریس شد، سپس اسلایدهای آماده شده توسط استاد درباره همان مفهوم با استفاده از چت جی پی تی در اختیار دانشجویان قرار گرفت و در پایان جلسه تمریناتی برای حل در اختیار دانشجویان قرار داده شد که در این بخش نیز دانشجویان مجاز به استفاده از چت جی پی تی برای حل تمرینات نبودند. در چرخه سوم ابتدا درس توسط استاد تدریس گردید به دانشجویان امکان و اجازه استفاده از چت جی پی تی برای آموزش درس تدریس شده داده شد و در پایان جلسه تمریناتی برای حل در اختیار دانشجویان قرار داده شد که در این بخش دانشجویان مجاز به استفاده از چت جی پی تی برای حل تمرینات نبودند.

در چرخه چهارم پس از تدریس توسط استاد دانشجویان مشابه حالت سوم از چت جی پی تی برای آموزش موارد تدریس شده استفاده کردند. در پایان تمریناتی برای حل در اختیار آنها قرار گرفت که در این بخش دانشجویان مجاز به استفاده از چت جی پی تی برای حل تمرینات بودند.

نتایج حاصل از حل تمرینات توسط دانشجویان در هر چهار چرخه جمع آوری و مورد تحلیل قرار گرفت. هم چنین در پایان چهار چرخه مصاحبه ای در مورد روند یادگیری در هر چهار چرخه انجام گرفت که بیش از هشتاد درصد شرکت کنندگان مفید بودن چرخه چهارم را در یادگیری اعلام داشتند.

۳- نتیجه و جمع بندی

پیش از شرکت در فعالیت‌ها، از دانشجویان ارزشیابی اولیه گرفته شد که هدف آن سنجش درک آن‌ها از مباحث تدریس شده در چهار جلسه است. این ارزشیابی به عنوان معیاری برای سنجش دانش پایه آنها در مورد موضوعات جدید مورد نظر بود که مشخص گردید دانش اولیه از موضوع در دانشجویان در حد صفر می‌باشد. فرآیند یادگیری در آزمایش در چهار فعالیت متمایز سازمان یافت و نتایجی به شرح زیر حاصل شد:

در فعالیت اول و دوم فقط دانشجویان سطح متوسط به بالا به درک نسبی از مطلب رسیدند (براساس مصاحبه صورت گرفته شده در پایان کلاس این مطلب مشخص شد). این گروه از دانشجویان تنها بخش ناچیزی از تمرینات را حل کردند. اکثریت دانشجویان اظهار داشتند که نیازمند مطالعه دوباره مطالب تدریس شده هستند و توانایی حل تمرینات را ندارند.

در بخش سوم ابتدا مطلب درسی توسط استاد تدریس شد. سپس در مدت زمان ۳۰ دقیقه به دانشجویان اجازه داده شد که مطالب درسی را با استفاده از چت جی پی تی دوباره مورد ارزیابی قرار دهند. در این فرآیند هر دانشجو براساس سوالات و ابهامات خود مطلب را بازبینی کرده بود و تا حدودی اکثریت دانشجویان به درک درستی از موضوع رسیده بودند و اظهار داشتن که تعاریف و مفاهیم و مثالهای حل شده را کامل متوجه شده اند. در مورد حل تمرین در این مرحله اکثریت درک درستی از سوالها داشته اند؛ ولی تنها تعداد محدودی توانسته بودند تمرینات رو به طور کامل حل نمایند.

در بخش چهارم ابتدا مطلب درسی توسط استاد تدریس شد. سپس در زمان ۳۰ دقیقه به دانشجویان اجازه داده شد که مطالب درسی را با استفاده از چت جی پی تی دوباره مورد ارزیابی قرار دهند. مشابه حالت سوم و با توجه به تجربه‌ای که در مرحله ۳ داشتند، دانشجویان مطالب درسی را به طور منسجم و با دیدی نقادانه دریافت نمودند. برخی از آنها که موفق به حل تمرین نشده بودند با استفاده از چت جی پی تی به حل تمرینات اقدام نمودند. دو نتیجه قابل تامل در این مرحله به دست آمده بود. برخی از دانشجویان بدون توجه، راه حل‌های چت جی پی تی از حل تمرین، را ارائه می‌دادند که توجهی به اشتباهات آن نداشتند. اما گروهی (سطح متوسط به بالای کلاس) با دیدی منتقدانه به راه حل‌های چت جی پی تی دقت کرده بودند و با تصحیح یا اشاره به اشتباه موجود در برهان‌ها در نهایت به جواب درست رسیده بودند.

در مصاحبه ای که بعد از اتمام این چهار مرحله صورت گرفت مهم ترین نتایج ذکر شده توسط دانشجویان به شرح زیر است:



ششمین همایش ملی ریاضی و آمار

<https://conf.gonbad.ac.ir/msc1404>

- ۱- بدون داشتن اطلاعات اولیه از موضوع در برخی موارد جوابهای گنگ و گمراه کننده از چت جی پی تی به دست آمده است.
 - ۲- در استفاده از چت جی پی تی شکستن مسئله به مسائل کوچکتر و حل گام به گام به جوابهای بهتری منجر می‌شد.
 - ۳- در حل مسائل عددی مانند محاسبه انتگرال یا مباحث مربوط به آنالیز عددی چت جی پی تی به خوبی عمل کرده و احتمال اشتباه در آن کم است. ولی در مورد دروس استدلالی مانند منطق و جبر در اکثر موارد نیازمند تفکر و تبادل دو طرفه برای حصول نتیجه هستیم.
 - ۴- به مقایسه‌ای بین فایل‌های آموزشی الکترونیکی به صورت ویدیویی و چت جی پی تی اشاره شده بود که زمان دستیابی به اطلاعات مورد نیاز در سطح کارشناسی با استفاده از چت جی پی تی پایین آمده و در صرفه جویی زمان مفید است.
- با توجه به پیشرفت روزافزون هوش مصنوعی، یکی از دغدغه‌های نویسندگان به عنوان مدرس ریاضی این است که قدرت تفکر و استدلال ریاضی در بین دانشجویان و دانش آموزان با وجود این ابزار تقویت شود. این پژوهش با هدف بررسی دیدگاه دانشجویان رشته ریاضی، در استفاده از چت جی پی تی انجام شد. این مطالعه با بررسی موردی، کیفیت یادگیری دروس ریاضی را مورد ارزیابی قرار داده است که در چهار مرحله مختلف این بررسی انجام گرفته است. با توجه به نظر مثبت اکثریت دانشجویان در استفاده از آن، نتایج حاکی از آن است که در استفاده از آن باید احتیاط کامل را رعایت کرد چه بسا در مواردی نتایجی ارائه گردد که فاقد درک عمیق از مفاهیم ریاضی باشد. استفاده کنترل نشده از چت جی پی تی به وابستگی بیش از حد برخی دانشجویان به راه‌حلهای هوش مصنوعی منجر می‌شود. ولی میتوان با استفاده از آموزش هوشمندانه استفاده از هوش مصنوعی در یادگیری و حل مسائل ریاضی به دانشجویان، تا حدی مشکلات و چالشهای ایجاد شده را کاهش داد. در پایان یادآور می‌شود که در این پژوهش فقط به بررسی استفاده از هوش مصنوعی توسط دانشجویان پرداخته شده است اما استفاده از آن توسط اساتید و مربیان برای بهبود کیفیت آموزش می‌تواند مورد ارزیابی و بررسی قرار گیرد.

۴- مراجع

- [1] S. Mahfudy Strategi pembuktian matematis mahasiswa pada soal geometri. JTAM: Jurnal Teori Dan Aplikasi Matematika, 1(1), pp.31-40, 2017. <https://doi.org/10.31764/jtam.v1i1.101>.
- [2] J. Muzangwa, U. Ogbonnaya, Visualization techniques for proofs: Implications for enhancing conceptualization and understanding in mathematical analysis. *Journal of Honai Math*, 7(2), 347–362. <https://doi.org/https://doi.org/10.30862/jhm.v7i2.603>
- [3] M.S. Noto, N. Priatna, and J. A. Dahlan, J. Mathematical proof: The learning obstacles of pre service mathematics teachers on transformation geometry. *Journal on Mathematics Education*, 10(1), 117–126. <https://doi.org/10.22342/jme.10.1.5379.117-126>
- [4] C. L. Maknun, R. Rosjanuardi, and A. Jupri, From ratios of right triangle to unit circle: an introduction to trigonometric functions. *Journal of Physics: Conference Series*, 1157, 022124. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1157/2/022124>.
- [5] C.A. Bonfield, M. Salter, A. Longmuir, M. Benson, and C. Adachi, Transformation or evolution? *Education 4.0, teaching and learning in the digital age. Higher Education Pedagogies*, 5(1), 223–246. <https://doi.org/10.1080/23752696.2020.1816847>
- [6] L. Chen, P. Chen, and Z. Lin, Artificial Intelligence in education: A review. *IEEE Access*, 8, 75264–75278. <https://doi.org/10.1109/ACCESS.2020.2988510>

ششمین همایش ملی ریاضی و آمار

<https://conf.gonbad.ac.ir/msc1404>

F-312، صص ۱۵۸-۱۶۲.

روش پلکانی در حل مسائل کنترل بهینه

مهدی افشار

مهدی افشار، دانشگاه آزاد اسلامی واحد زنجان؛ mehdi.afshar@iau.ac.ir

چکیده

در این مقاله یک راه حل موثر برای حل مسائل کنترل بهینه ارائه شده است. حل مسائل کنترل بهینه با روشهای تحلیلی در مسائل کاربردی در اکثر موارد عملاً مقدور نیست. روشهای تحلیلی بر پایه اصل بیشینگی پونتریاگین (PMP) بنا نهاده شده اند که در مواقع محاسبات مشکلات این روش دیده می شود. در اینجا روشی برای حل مسائل کنترل بهینه ارائه شده که برای مسایلی که کنترل در آنها به صورت پله ای می تواند باشد بسیار موثر است. این روش قابلیت استفاده از انواع روشهای ابتکاری و تحلیلی را در خود دارد.

کلمات کلیدی: کنترل بهینه، مدلسازی ریاضی، اصل بیشینگی پونتریاگین.

۱- مقدمه

کنترل بهینه یک ابزار قدرتمند در مدل سازی و بهینه سازی سیستم های فیزیکی، بیولوژیکی، اقتصادی و سایر سیستم های دنیای واقعی است [1-4]. روش کلاسیک و اصلی در این حوزه، اصل بیشینگی پونتریاگین (PMP) است. با این حال، PMP محدودیت های عملی مهمی دارد:

- شروط هموار بودن در کنترل PMP: فرض می کند که تابع کنترل، پیوسته و دارای مشتق پیوسته است.
 - پیچیدگی محاسباتی: حل مسائل با دینامیک پیچیده یا تابع هزینه پیچیده با PMP دشوار است.
- در بسیاری از کاربردهای واقعی (مانند تزریق دارو، تخصیص منابع، یا سیستم های دارای رله)، تغییر پیوسته کنترل عملی یا مطلوب نیست. در این موارد، ترجیح داده می شود که کنترل فقط در لحظات مشخصی تغییر کند و در بازه های بین آنها ثابت بماند. چنین کنترل های گام به گام یا پلکانی را نمی توان مستقیماً با PMP به دست آورد. در بخش بعدی این روش در دو صورت طول گامهای ثابت و متغیر ارائه می شود.

۲- معرفی روش پلکانی

ابتدا مثالی ساده از مساله کنترل را که به صورت تحلیلی جواب آن قابل محاسبه است ارائه می دهیم که جواب تحلیلی آن هم به صورت دقیق محاسبه شده است.

$$\max J = \int_0^2 2x - 3u - u^2 dt$$

$$x' = x + u, \quad x(0) = 5$$

جواب این مساله به صورت تحلیلی است و به شکل زیر است و تابع کنترل بهینه حاصل از PMP یک تابع پیوسته است.

ششمین همایش ملی ریاضی و آمار

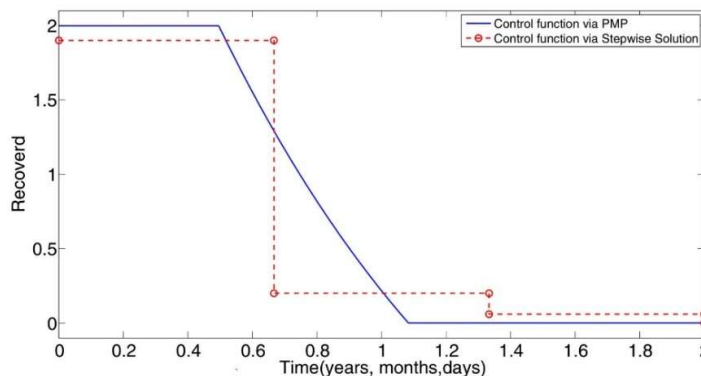
<https://conf.gonbad.ac.ir/msc1404>

$$u = \begin{cases} 2 & e^{2-t} - 2.5 > 2 \\ e^{2-t} - 2.5 & 0 \leq e^{2-t} - 2.5 \leq 2 \\ 0 & e^{2-t} - 2.5 < 0 \end{cases}$$

۱.۷- روش پلکانی با گامهای ثابت

روش پلکانی به این صورت معرفی می شود:

- بازه زمانی کل $[0, T]$ به چند زیربازه (مثلاً ۳ زیربازه مساوی) تقسیم می شود.
 - فرض می شود که تابع کنترل $u(t)$ در هر زیربازه یک مقدار ثابت (اما ناشناخته) دارد. مثلاً مقادیر γ, β, α
 - با این فرض، مسئله کنترل بهینه به یک مسئله بهینه سازی پارامتری تبدیل می شود که در آن مقادیر بهینه γ, β, α باید پیدا شوند.
 - برای ارزیابی تابع هزینه با فرض مقادیر مشخص برای این پارامترها، معادله دیفرانسیل حالت $x' = f(x, u, t)$ به صورت متوالی و با شرایط اولیه مناسب در هر زیربازه حل می شود.
 - برای یافتن مقادیر بهینه پارامترها، از الگوریتم های فراابتکاری بهینه سازی مانند الگوریتم ژنتیک (GA)، تبرید شبیه سازی شده (SA) و جستجوی الگو (PS) استفاده می شود.
- طبیعی است که با استفاده از لم ای که بیان می کند هر تابع پیوسته را می توان با دنباله ای از توابع پلکانی تقریب زد، می توان مطمئن بود که روش گام به گام می تواند به جواب های مفیدی نزدیک به جواب PMP دست یابد. حتی ممکن است در برخی موارد به دلیل حذف محدودیت همواری، جواب های بهتری نسبت به PMP پیدا کند. نمودار توابع کنترل در شکل (۱) آمده است.



شکل ۱: جواب تحلیلی مساله کنترل بهینه و جواب پلکانی

نتایج عددی برای مثال ساده:

- در حالتی که مساله با PMP حل می شود تابع هزینه برابر 0.0143 است.
- در حالتی که مساله با روش پلکانی و با سه گام (با طول گام ثابت) حل شود، هزینه نهایی به دست آمده توسط الگوریتم های مختلف حدود 0.01435 است که بسیار به جواب PMP نزدیک است.

ششمین همایش ملی ریاضی و آمار

<https://conf.gonbad.ac.ir/msc1404>

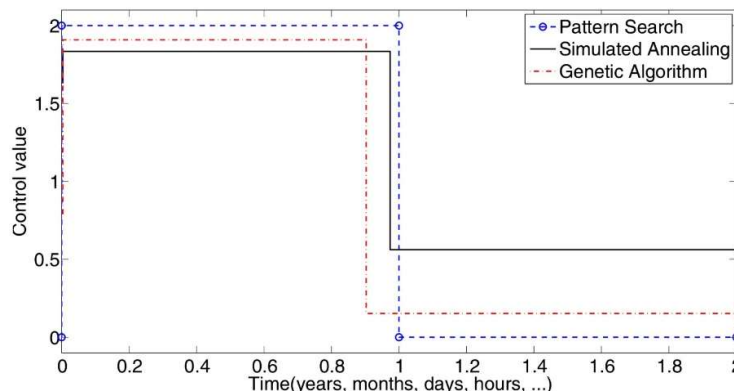
۲.۷- روش پلکانی با گامهای متغیر

برای انعطاف پذیری و دقت بیشتر، می توان نه تنها مقادیر کنترل در هر بازه، بلکه طول خود بازهها را نیز به عنوان متغیرهای بهینه سازی در نظر گرفت.

- به جای تقسیم مساوی بازه $[0, T]$ ، آن را به $[0, a]$ ، $[a, b]$ و $[b, T]$ تقسیم می کنیم.
- هم مقادیر کنترل α, β, γ و هم نقاط مرزی a و b توسط الگوریتم بهینه سازی پیدا می شوند.

نتایج عددی برای مثال ساده با اندازه گام متغیر:

- هزینه نهایی به دست آمده با این روش 0.01257 با (PS بهتر (کمتر) از هزینه نهایی (PMP (0.0143) است.
- این نشان می دهد که آزاد کردن اندازه گامها، پتانسیل یافتن جوابهای بهینه تر را افزایش می دهد.
- در همه الگوریتمها، اولین گام زمانی بسیار کوتاهی داشت (نزدیک به صفر)، که نشان دهنده اهمیت تطبیق ساختار کنترل با دینامیک مسئله است. نمودار توابع کنترل در شکل (۲) آمده است.



شکل ۲: کنترل بهینه با روش پلکانی با گامهای متغیر

۳.۷- کاربرد در مسائل دنیای واقعی

روشهای کنترل بهینه برای کنترل بهینه شیمی درمانی مفید هستند. به عنوان مثال، رنه فیستر و همکارانش [5] مدل های مختلف کشتن سلول در شیمی درمانی را مطالعه کردند. آنها یک استراتژی کنترل بهینه را مشخص کردند که توده سرطانی و هزینه کل مقدار داروی اعمال شده را به حداقل می رساند. ما روش گام به گام را برای یکی از مدل های آنها اعمال می کنیم. مدل ریاضی مسئله به صورت کنترل بهینه در آمده است:

$$\min J = \int_0^T a(N(t) - N_d)^2 + bu^2(t)dt$$

$$N'(t) = rN \ln\left(\frac{1}{N}\right) - u(t)\delta N(t)$$

$$N(0) = N_0, \quad u(t) \geq 0$$

پارامترهای این مدل عبارتند از:

• $N(t)$: چگالی نرمال شده تومور در زمان t ,

• r : نرخ رشد تومور،

ششمین همایش ملی ریاضی و آمار

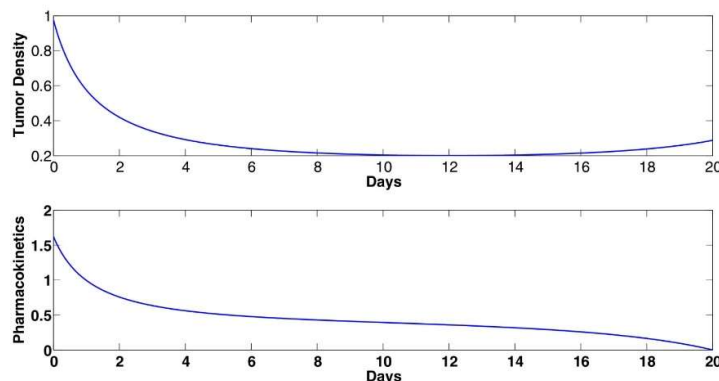
<https://conf.gonbad.ac.ir/msc1404>

• d : مقدار دوز،

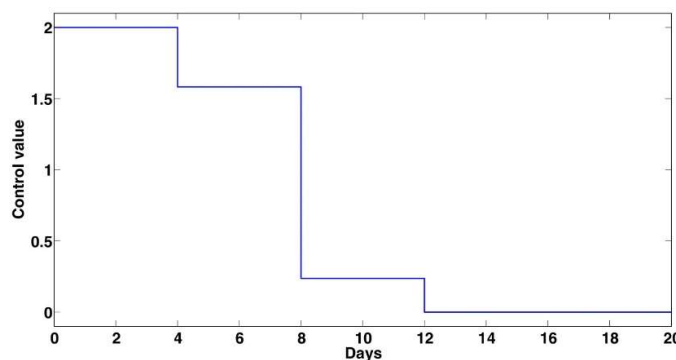
• $u(t)$: فارماکوکینتیک وابسته به زمان دارو،

• Nd : چگالی مطلوب تومور.

بدون از دست دادن کلیت، بهینه‌سازی خود را با فرض $r = 0.1$, $a = 3$, $b = 1$, $d = 0.45$, $Nd = 0$, $N0 = 0.975$ و $T = 20$ انجام می‌دهیم. شکل ۵ چگالی تومور و استراتژی کنترل بهینه مربوطه را که با استفاده از روش PMP به دست آمده است، نشان می‌دهد. کنترل بهینه به دست آمده با استفاده از روش گام به گام ما (با ۵ مرحله ثابت) در شکل ۶ نشان داده شده است. هزینه نهایی PMP و روش گام به گام به ۵ مرحله‌ای به ترتیب برابر با ۱۰,۷۷۵۸ و ۱۰,۸۶۶۶ است. همانطور که مشاهده می‌شود، هزینه نهایی روش پیشنهادی نسبتاً نزدیک به PMP است، در حالی که مزیت ثابت بودن در هر مرحله را دارد و در عمل بسیار آسان‌تر قابل استفاده است. کنترل گام به گام به دست آمده، در هر مرحله ثابت است و اجرای آن در دنیای واقعی (مثلاً تنظیم پروتکل تزریق دارو) بسیار ساده‌تر از یک تابع کنترل پیوسته است. نمودار توابع کنترل در شکل (۳ و ۴) آمده است.



شکل ۳: جواب مدل کنترل بهینه مدل کنترل تومور با روش پونتریاگین



شکل ۴: جواب مدل کنترل بهینه مدل کنترل تومور با روش پلکانی

۳- نتیجه و جمع‌بندی

- روش گام به گام معرفی شده، یک جایگزین عملی و قدرتمند برای اصل بیشینه پونتریاگین در بسیاری از مسائل کنترل بهینه دنیای واقعی است.



ششمین همایش ملی ریاضی و آمار

<https://conf.gonbad.ac.ir/msc1404>

• مزایای کلیدی:

۱. حذف محدودیت پیوستگی: امکان یافتن کنترل‌های بهینه پلکانی را فراهم می‌کند که در عمل مطلوب‌ترند.
۲. سادگی اجرا: تبدیل مسئله کنترل بهینه به یک مسئله بهینه‌سازی پارامتری استاندارد که با ابزارهای رایج قابل حل است.
۳. انعطاف‌پذیری: امکان استفاده از اندازه گام‌های ثابت یا متغیر و نیز ترکیب با هر الگوریتم بهینه‌سازی.
۴. کارایی: در مثال‌های ارائه شده، هم در مسائل ساده و هم در مدل‌های پیچیده بیولوژیکی، نتایجی بسیار نزدیک (و گاهی بهتر) از PMP تولید کرده است.
۵. قابلیت تفسیر: کنترل‌های خروجی ساده، گسسته و برای متخصصان حوزه کاربردی (مثل پزشکی یا مدیریت منابع) قابل درک و اجرا هستند.

۴- مراجع

- [۱] S. P. Sethi, and G. L. Thompson, Optimal Control Theory: Applications to Management Science and Economics, Kluwer, Boston, 2nd edition, (2000).
- [۲] S. Lenhart, J. T. Workman, Optimal Control Applied to Biological Models, Chapman and Hall, London, (2007).
- [۳] K. Renee Fister, J.C. Panetta, Optimal Control Applied to Competing Chemotherapeutic Cell-kill Strategies, Chapman and Hall, London, (2007).
- [۴] D. Kirschner, S. Lenhart, S. SerBin, Optimal Control of the Chemotherapy of HIV, Journal of Mathematical Biology, 35, (2007), 775–792.
- [۵] K. Fister, J. Donnelly, Immunotherapy: An Optimal Control Theory Approach, Mathematical Biosciences and Engineering, 2(3), (2005); 499–510.

F-A-210

مثال نقضی بر یک روش رتبه‌بندی بهبود یافته تحت عدم قطعیت فازی

مدینه فرنام

گروه مهندسی برق، دانشگاه شهید چمران اهواز- پردیس صنعتی شهدای هویزه، دشت آزادگان، خوزستان، ایران؛ m.farnam@scu.ac.ir

چکیده

روش‌های رتبه‌بندی کاربردهای بسیاری برای حل مسائل مختلف بهینه‌سازی و عدم قطعیت در شرایط فازی دارند. از این رو بررسی صحت و نحوه عملکرد آنها می‌تواند تاثیر شایانی در توسعه تئوری و کاربردی آنها داشته باشد. در این مطالعه مثال نقضی بر یکی از این دسته روش‌های بهبود یافته ارائه می‌دهم. در سال ۲۰۲۰، ماریموثو و ماهاپاترا [1] یک روش رتبه‌بندی چندمرحله‌ای مبتنی بر مقادیر میانی، شعاعی، چپ و راست برای اعداد فازی ذوزنقه‌ای تعمیم‌یافته معرفی کردند. در ادامه جیواراج [2] با ارائه برخی مثال‌های نقض، ضمن بهبود قضایای ایشان، روش رتبه‌بندی اصلاح‌یافته‌ای ارائه دادند. اما این روش نیز در مواردی تمایز صحیحی بین این نوع اعداد را نشان نمی‌دهد. آنها برای یک عدد فازی ذوزنقه‌ای تعمیم‌یافته مانند $\tilde{u}_1 = \langle (a_1, b_1, c_1, d_1); \omega_1 \rangle$ مقادیر میانی، شعاعی و مقادیر چپ و راست را به ترتیب براساس روابط $R(\tilde{u}_1) = \frac{(d_1 - c_1)}{2} \omega_1$ ، $L(\tilde{u}_1) = \frac{(b_1 - a_1)}{2} \omega_1$ ، $r(\tilde{u}_1) = \frac{(c_1 - b_1)}{2} \omega_1$ ، $m(\tilde{u}_1) = \frac{(b_1 + c_1)}{2} \omega_1$ محاسبه کردند [2]. در ادامه، با ارائه یک مثال نقض نشان می‌دهیم که روش اصلاح‌شده مذکور، در مواردی فاقد توانایی تمایز بین اعداد فازی متفاوت است. برای دو عدد $\tilde{u}_1 = \langle (-0/4, 0, 0/4, 0/8); 0/1 \rangle$ و $\tilde{u}_2 = \langle (-0/2, 0, 0/2, 0/4); 0/2 \rangle$ با وجود مساوی نبودن دو عدد، تمامی مقادیر میانی، شعاعی و چپ و راست برای هر دو، برابر $0/2$ به دست می‌آید. این نتیجه به وضوح نشان می‌دهد که با وجود متفاوت بودن پارامترهای اصلی دو عدد (هم از نظر پشتیبانی و هم از نظر ارتفاع عضویت)، خروجی روش رتبه‌بندی یکسان است و در نتیجه روش در این حالت قادر به رتبه‌بندی و تمایز صحیح بین اعداد نمی‌باشد. این مثال نقض، لزوم بازنگری در فرضیات و شرایط ضمنی روش‌های رتبه‌بندی متکی بر این دسته از شاخص‌ها را آشکار می‌سازد. از این رو، صحت قضایای مطرح‌شده نیازمند اعمال محدودیت‌های اضافی بر روی دامنه پارامترهای اعداد فازی ورودی است. این یافته بر اهمیت آزمودن روش‌های رتبه‌بندی پیشنهادی با طیف گسترده‌ای از مثال‌های بحرانی، پیش از تعمیم‌دهی نتایج، تأکید می‌کند. گردآوری نظام‌مند چنین مثال‌های نقضی در قالب یک پایگاه داده استاندارد می‌تواند به عنوان معیاری عملی برای ارزیابی صحت و قدرت تمایز روش‌های آینده مورد استفاده قرار گیرد و توسعه روش‌های رتبه‌بندی مقاوم‌تر و قابل اطمینان‌تر را تسهیل نماید.

کلمات کلیدی: عدد فازی؛ عدد فازی ذوزنقه‌ای تعمیم‌یافته؛ روش رتبه‌بندی؛ مثال نقض.

مراجع

- [1] Marimuthu, D., & Mahapatra, G. (2021). Multi-criteria decision-making using a complete ranking of generalized trapezoidal fuzzy numbers. *Soft Computing*, 25(15), 9859-9871.
- [2] Jeevaraj, S. (2022). A note on multi-criteria decision-making using a complete ranking of generalized trapezoidal fuzzy numbers. *Soft Computing-A Fusion of Foundations, Methodologies & Applications*, 26(21).

بررسی نظری ساختار مقدار مورد انتظار برای اعداد فازی شهودی

مدینه فرنام^۱، هادی بصیرزاده^۲

^۱گروه مهندسی برق، دانشگاه شهید چمران اهواز- پردیس صنعتی شهدای هویزه، دشت آزادگان، خوزستان، ایران؛ m.farnam@scu.ac.ir
^۲گروه ریاضی، دانشکده علوم ریاضی و کامپیوتر، دانشگاه شهید چمران اهواز، اهواز، ایران؛ basirzad@scu.ac.ir

چکیده

در دنیای واقعی، برای حل بسیاری از مسائل بهینه‌سازی تحت عدم قطعیت ناشی از اعداد فازی شهودی دوزنقه‌ای، همواره با مجموعه‌ای از اهداف یا محدودیت‌هایی خطی مواجه هستیم. در چنین فضایی اگر برای تبدیل مدل فازی شهودی به مسئله معادل قطعی از مقدار مورد انتظار استفاده شود، باید شرایط مربوط به حفظ خطی بودن ساختار بررسی شود. گرای و همکاران [1] بدون بررسی شرایط لازم برای ساختار خطی یک تابع انتظار، از آن در حل مسائل بهینه‌سازی خطی استفاده کردند. ایشان برای یک عدد فازی شهودی دوزنقه‌ای مانند $\tilde{A}_1 = ((a_1, b_1, c_1, d_1; \omega_1), (a'_1, b_1, c_1, d'_1; v_1))$ رابطه $Ex(\tilde{A}_1) = \frac{(a_1+b_1+c_1+d_1)\omega_1 + (a'_1+b_1+c_1+d'_1)v_1}{8}$ را به عنوان مقدار مورد انتظار معرفی نمودند. البته در بیشتر مثال‌های ایشان اعداد به گونه‌ای تنظیم شدند که مقادیر عضویت و عدم عضویت با هم مقداری برابر داشتند. علاوه بر این، مقدار تردید نیز صفر در نظر گرفته شد. در واقع ایشان کارایی روش خود را در مثال‌هایی با اعداد فازی شهودی خاص بررسی کردند. بررسی بیشتر تابع نشان می‌دهد Ex تنها در صورتی یک عملگر خطی است که ارتفاع عضویت و ارتفاع عدم عضویت برای تمامی اعداد فازی شهودی به کار رفته در مدل یکسان باشند. به عبارت دقیق‌تر، برای دو عدد \tilde{A}_1 و \tilde{A}_2 و هر اسکالر حقیقی نامنفی مانند λ تساوی $Ex(\lambda\tilde{A}_1 + \tilde{A}_2) = \lambda Ex(\tilde{A}_1) + Ex(\tilde{A}_2)$ وقتی برقرار است که $\omega_1 = \omega_2$ و $v_1 = v_2$ باشند. برهان این قضیه از طریق اعمال مستقیم تعریف جمع و ضرب اسکالر بر روی پارامترهای دوزنقه‌ای و جایگذاری در فرمول تابع انتظار حاصل می‌شود. این نتیجه به وضوح محدودیت ذاتی این تعریف خاص از انتظار را نشان می‌دهد. این شرط در کاربردهای واقعی، که در آن اعداد فازی شهودی متنوع با درجات مختلفی از اعتماد و تردید حضور دارند، محقق نمی‌شود. در نتیجه، با اینکه این قضیه گامی رو به جلو در تبیین خواص ریاضی تابع انتظار است، کاربرد عملی آن در بهینه‌سازی خطی عمومی را با چالش مواجه می‌سازد. این مطالعه بر ضرورت توسعه‌ی تعاریف جایگزین یا تعمیم‌یافته از مقدار مورد انتظار که بتوانند ساختار خطی را بدون چنین شرایط محدودکننده‌ای حفظ کنند، یا ملاحظه‌ی صریح مؤلفه تردید در مدل‌سازی، تأکید می‌کند. پژوهش‌های آتی می‌توانند بر طراحی عملگرهای انتگرال‌گیری فازی شهودی مقاوم‌تر یا ارائه‌ی چهارچوب‌های تبدیلی غیرخطی که اطلاعات شهودی را به طور کامل‌تری حفظ می‌کنند، متمرکز شوند.

کلمات کلیدی: مقدار مورد انتظار؛ عدد فازی شهودی؛ بهینه‌سازی؛ ساختار خطی.

مراجع

- [1] Garai, T., Chakraborty, D., & Roy, T. K. (2018). Possibility–necessity–credibility measures on generalized intuitionistic fuzzy number and their applications to multi-product manufacturing system. *Granular Computing*, 3(4), 285-299.



ششمین همایش ملی ریاضی و آمار

<https://conf.gonbad.ac.ir/msc1404>

F-A-204

کاربرد جبر لی در نظریه کنترل و بررسی مفهوم کنترل پذیری در سیستم‌های کنترل غیرخطی با استفاده از براکت‌های لی

مهرآسا آیت‌اللهی

استادیار، گروه ریاضی، دانشگاه پیام نور، صندوق پستی ۴۶۹۷-۰۱۹۳۹۵، تهران، ایران: m_ayatollahi@pnu.ac.ir

چکیده

نظریه کنترل از ابتدا بر پایه سیستم‌های خطی در فضای اقلیدسی بنا شده است. در این فضا، رفتار سیستم‌ها توسط معادلات خطی بیان می‌شود و ابزارهایی نظیر فضای حالت خطی، ماتریس‌های انتقال و روش‌های کلاسیک برای بررسی پایداری و کنترل سیستم‌ها قابل استفاده هستند. با پیشرفت فناوری، به‌ویژه در زمینه رباتیک، هوافضا، میکروماهواره‌ها و سیستم‌های هوشمند، مشخص شد که بسیاری از مدل‌های واقعی نمی‌توانند در چارچوب خطی یا حتی فضای اقلیدسی \mathbb{R}^n توصیف شوند. از آنجا که به وسیله جبر لی و گروه‌های لی می‌توان ساختارهای هندسی و غیرخطی را در کنار ساختارهای جبری تحلیل کرد، جبر لی و گروه‌های لی در دهه‌های اخیر به یکی از ابزارهای بنیادی در نظریه کنترل، به‌خصوص کنترل غیرخطی و کنترل سیستم‌های دینامیکی روی منی‌فولدها، تبدیل شده‌اند. بسیاری از سیستم‌های مکانیکی و رباتیکی، مانند پهپادها، ماهواره‌ها، ربات‌های متحرک و بازوهای رباتیک، ساختاری غیرخطی دارند و در فضاهایی تعریف شده‌اند که رفتار اقلیدسی ساده‌ای ندارند. در این شرایط، استفاده از ابزارهای دیفرانسیلی و ساختارهای جبری حاصل از گروه‌های لی، با ارائه مفاهیمی مانند میدان‌های برداری، براکت لی و ساختارهای ناوردا، امکان تحلیل کنترل پذیری، طراحی کنترل‌کننده‌های پایدار و توسعه الگوریتم‌های تخمین حالت را فراهم می‌کند. در این مقاله، ضمن توصیف ساختار سیستم‌های دینامیکی روی گروه‌های لی به بررسی کنترل پذیری سیستم‌های غیرخطی در چارچوب جبر لی می‌پردازیم. بدین منظور مسیرهای ایجاد شده توسط ترکیبات غیرخطی ورودی‌ها را با استفاده از براکت‌های لی بررسی کرده و مشخص می‌کنیم آیا سیستم مورد نظر قادر به پیمایش کل فضای حالت هست یا نه و در انتها با ارائه یک مثال نشان می‌دهیم که شرط کنترل پذیری حتی برای سیستم‌هایی که محدودیت حرکتی دارند هم می‌تواند برقرار باشد.

کلمات کلیدی: جبر لی، گروه لی، کنترل غیرخطی، کنترل پذیری، براکت لی.



ششمین همایش ملی ریاضی و آمار

<https://conf.gonbad.ac.ir/msc1404>

F-A-383

توزیع نظری آماره T^2 در فاز II پروفایل‌های پواسون

حمید رضا محقی

هیات علمی گروه مهندسی صنایع دانشگاه بجنورد؛ moheghi@ub.ac.ir

چکیده

پروفایل‌ها در کنترل کیفیت آماری کمتر از سه دهه است که مطرح شده‌اند و پژوهش‌های زیادی درباره آنها انجام شده است. پروفایل‌های GLM رده‌ای از پروفایل‌ها هستند که متغیر پاسخ آنها متعلق به خانواده نمایی توزیع‌ها است. کنترل پروفایل‌ها در دو فاز I و II انجام می‌شود و یکی از رایجترین روش‌های کنترل پروفایل استفاده از آماره T^2 می‌باشد. در فاز II برای به دست آوردن توان آزمون، لازم است توزیع آماره T^2 در صورت تغییر پارامترهای پروفایل از مقدار معلوم آن مشخص شود. یافتن توزیع نظری آماره T^2 در این مورد در پروفایل GLM به صورت نظری مشکل است و پژوهش‌های گذشته توان آزمون را با شبیه‌سازی به دست آورده‌اند. پروفایل پواسون به صورت $E(Y) = e^{\beta_0 + \beta_1 x}$ نمایش داده می‌شود که در آن Y توزیع پواسون دارد. در این مقاله توزیع نظری آماره T^2 در فاز II وقتی فقط β_0 تغییر می‌کند بررسی می‌شود. به بیان دیگر توزیع نظری آماره را وقتی بردار (β_0, β_1) به بردار $(\beta_0 + \delta_0, \beta_1)$ تغییر می‌یابد به دست می‌دهد. اثبات نظری نشان می‌دهد که توزیع آماره T^2 در این حالت به صورت حدی برابر توزیع حاصلضرب یک مقدار ثابت (که تابعی از δ_0 است) در متغیر تصادفی کای دو غیر مرکزی است. همچنین بررسی‌های نظری و شبیه‌سازی در این پژوهش شاخص متوسط طول دنباله ARL ، را که شاخصی مهم در نمودارهای کنترل کیفیت آماری محسوب می‌شود را در شرایط ذکر شده مورد بررسی قرار داده است. نتایج نشان می‌دهد با تغییر شرح داده شده در بالا، ARL همواره نزولی نیست و ممکن است در بازه ای صعودی باشد که نتیجه ای تعجب آور به نظر می‌رسد.

کلمات کلیدی: نمودار کنترل، پروفایل، پروفایل پواسون، آماره T^2 ، ARL